Jaderná fyzika

1) Úvod – vývoj názorů na hmotu

- „Již staří Řekové“ (Demokritos, 5.st. př. n. l.) … od nich pochází myšlenka, že hmota není nekonečně dělitelná, i název „**atom**“ pro nejmenší částici hmoty, již dále nedělitelnou.

- Atomová teorie se stala skutečnou přírodovědnou teorií až počátkem 19. století, kdy pojem atomu jako nejmenší částice chemického prvku zavedl Dalton (1808), aby vysvětlil váhové poměry při tvorbě sloučenin.

- Až téměř do konce 19. století se pak o složení atomu prakticky nic nevědělo.

- Po objevu elektronu (1898) navrhl Thomson téhož roku „**pudinkový model atomu**“, ve kterém byly záporné elektrony rozloženy ve spojité kladné hmotě.

- Až za 13 let (1911) dokázali Geiger a Marsden na návrh Rutherforda tento model experimentálně otestovat (ostřelovali velmi tenkou folii částicemi alfa – ty většinou procházeli volně, ale malá část z nich se rozptylovala o velké úhly – tzn. větší část folie je „prázdná“, ale existují místa s kladným nábojem a velkou hmotou) a na základě těchto výsledků byl navržen „**Rutherfordův (planetární) model atomu**“ , který se skládal z velmi malého **jádra** (které má veškerý kladný náboj atomu a téměř všechnu hmotu), kolem kterého obíhají **elektrony** (jako planety kolem Slunce).

- Modely atomu byly dále zpřesňovány (Bohrův model) a byly zkoumány vlastnosti jader, neboť experimenty (radioaktivita) naznačovaly, že jádro není hmotný bod, ale nějaký složený útvar. První byl „**Fermiho model jádra**“ složený z vodíkových jader – **protonů** a **elektronů** .

- Teprve roku 1932 - po objevu **neutronu** (Chadwick) – vznikl dodnes platný **model jádra z protonů a neutronů** (Ivaněnko, Heisenberg).

- Ve 40. a 50. letech vznikly matematické modely jader – **kapkový model, slupkový model** a do současnosti jsou dále upřesňovány, jsou zkoumány **jaderné síly** (mezonová teorie) a vzájemné **interakce** jader, s cílem co nejlépe popsat chování atomových jader a mikročástic vůbec.

2) Základní charakteristiky jádra

- **Označení jader**

Podle současného standardního modelu je **jádro atomu** tvořeno **nukleony** dvojího druhu - kladnými **protony** a neutrálními **neutrony** a může být formálně označeno :

$\boxed{{}^{A}_{Z}X}$ nepříklad pro uhlík : $\boxed{{}^{12}_{6}C}$

Nukleonové číslo $\boldsymbol{A}$ udává celkový počet nukleonů a ***protonové číslo*** $\boldsymbol{Z}$ je pak počet protonů v jádře (stejně je také elektronů v elektronovém obalu neutrálního atomu). Počet **neutronů** v jádře můžeme tedy vyjádřit rozdílem $\boldsymbol{A-Z}$.

- **Hmotnost jader**

K jejímu vyjádření se standardně používá atomová hmotnostní jednotka definovaná jako jedna dvanáctina hmotnosti atomu uhlíku ${}^{12}_{6}C$:

$$\boxed{m_u = \frac{1}{12} \cdot m({}^{12}_{6}C) \approx 1{,}6604 \cdot 10^{-27} \ kg}$$

atomová hmotnostní jednotka

S přesností necelého procenta je tato jednotka rovna hmotnosti jednoho nukleonu :

$$m_p = 1{,}6725 \cdot 10^{-27} \ kg = 1{,}0072766 \cdot m_u$$

$$m_n = 1{,}6748 \cdot 10^{-27} \ kg = 1{,}0086654 \cdot m_u$$

Hmotnost jádra ${}^{A}_{Z}X$ lze tedy s touto přesností vyjádřit pomocí celkového počtu nukleonů :

$$\boxed{m_j = A \cdot m_u}$$

přibližná hmotnost jádra

Jestliže pak porovnáme hmotnost jádra m_j s hmotnostmi jednotlivých nukleonů, tj. se hmotností protonů m_p a hmotností neutronů m_n (jako samostatných, volných částic) , zjistíme neuvěřitelnou skutečnost, že **součet hmotností** všech nukleonů daného jádra je **větší** než **hmotnost jádra** , z nich vytvořeného.
Vypadá to tak, že při „sestavení“ jádra z jeho stavebních prvků – nukleonů – se „ztratí“ část hmoty – můžeme definovat úbytek hmotnosti :

$$\boxed{\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_j \neq 0}$$

hmotnostní úbytek jádra

Vysvětlení hmotnostního úbytku poskytuje **Einsteinův vztah ekvivalence hmotnosti a energie :**
Na rozdíl od počátečního souboru volných samostatných nukleonů je totiž výsledné jádro atomu velmi stabilní kompaktní útvar, který „drží pohromadě“ **velikými přitažlivými silami** a důsledkem jejich práce je obrovská **vazební energie** jádra E , která splňuje Einsteinův vztah :

$$\boxed{E = \Delta m \cdot c^2}$$

Pokles hmotnosti je tedy přesně „**vykompenzován**“ vazební energií jádra (která se při jeho vzniku projeví jako tepelná energie, viz následující odstavec „Jaderné síly“.).
Ačkoli je hmotnostní úbytek jádra velni malý - řádově několik procent hmotnosti jádra - podle Einsteinova vztahu, obsahujícímu kvadrát rychlosti světla, tomu ale odpovídá obrovské množství energie (řádově MeV [megaelektronvolty], milionkrát více než vazební energie elektronů v atomu).

- **Rozměry jader**

Již **rozměry atomů** jsou nepředstavitelně malé – řádu $10^{-10} \ m = 1 \ \text{Å}$ (angström), ale **rozměry jader** jsou ještě stotisíckrát menší – řádu $10^{-15} \ m = 1 \ fm$ (fermi).
Uvádí se experimentální vztah pro poloměr jádra, za předpokladu jeho kulového tvaru :

$$r \approx 1{,}3 \cdot \sqrt[3]{A} \cdot 10^{-10} \quad [\,m\,] = 1{,}3 \cdot \sqrt[3]{A} \quad [\,fm\,]$$

například pro jádro vodíku $^{1}_{1}H$ (tj. jeden nukleon) vychází : $r \approx 1{,}3 \cdot \sqrt[3]{1} = 1{,}3\ fm$

pro jádro uhlíku $^{12}_{6}C$: $r \approx 1{,}3 \cdot \sqrt[3]{12} = 3{,}0\ fm$

pro jádro uranu $^{238}_{92}U$: $r \approx 1{,}3 \cdot \sqrt[3]{238} = 8{,}1\ fm$

- **Hustota jader**

Jestliže předpokládáme jádro ve tvaru koule, a hmotnost nukleonu přibližně rovnou hmotnostní jednotce, pak lze hustotu jádra vyjádřit :

$$\rho = \frac{m_j}{V_j} = \frac{A \cdot m_u}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$$

A po dosazení za poloměr jádra a za hmotnostní jednotku vychází hustota konstantní a nepředstavitelné velikosti :

$$\rho = \frac{A \cdot m_u}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3} = \frac{A \cdot 1{,}6604 \cdot 10^{-27}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\,1{,}3 \cdot \sqrt[3]{A} \cdot 10^{-10}\,)^3} \approx 2 \cdot 10^{17} \quad [\,kg / m^3\,]$$

3) Jaderné síly a vazební energie

Atomová jádra jsou velmi stabilní útvary (výjimky – nestabilní jádra – radioaktivita) , je proto zřejmé, že přitažlivé síly , které působí mezi nukleony a jádro vlastně „drží pohromadě“ , budou :

- **velmi silné** (100 - krát větší něž síly elektromagnetické, 10^{39} - krát větší než gravitační síly mezi nukleony).

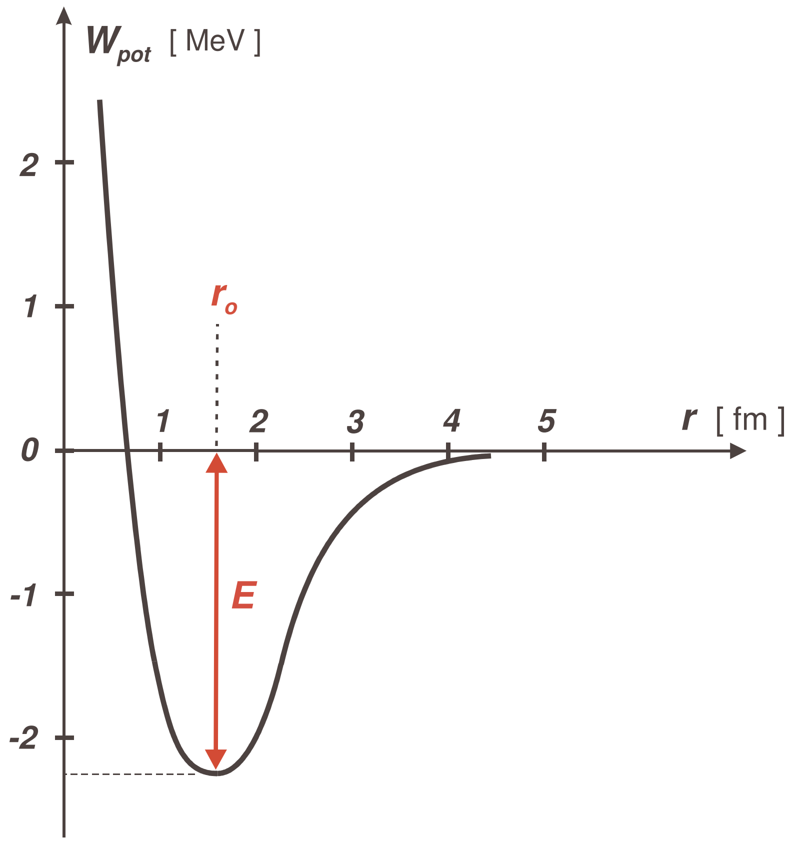
To je také jedna ze základních vlastností **jaderných sil** **-** tzv. **silná interakce.**

Jejich další zásadní a zajímavé vlastnosti jsou :

- **krátký dosah** (několik fermi, pak jsou prakticky nulové)
- **nezávislost na náboji** nukleonu
- **saturační charakter** (působí na sebe jen několik okolních nukleonů)

Teorie silné interakce – Yukava 1935 : **výměnná interakce – mezony** (detekovány až 1956).

Průběh jaderné síly mezi dvěma nukleony v závislosti na vzdálenosti r jejich středů popisuje následující graf **potenciální energie** této síly (přesně řečeno je to potenciální energie jednoho nukleonu v poli druhého nukleonu – tj. práce vykonaná vnější silou při přesunu nukleonu z nekonečna do daného místa, nebo vykonaná jadernou silou při přesunu jednoho nukleonu z daného místa do nekonečna, u jaderné síly s krátkým dosahem postačí jistě jen do nějaké dostatečné konečné vzdálenosti)



Z obrázku je vidět krátký dosah jaderné síly (3-4 fm), která má nejprve přitažlivý charakter (potenciální energie klesá), ale při větším přiblížení jader se mění na sílu odpudivou (potenciální energie roste). **Minimum energie** (kolem 1,5 fm) určuje místo r_o **rovnováhy** obou sil a je to místo **stabilní** vzdálenosti obou nukleonů.- vzniká tak stabilní soustava obou nukleonů – nejjednodušší složené atomové jádro $^{2}_{1}D$.
Hloubka minima (zde asi 2,2 MeV) se nazývá **vazební energie** jádra E :

- je to energie (práce) spojená s **vytvořením jádra** (jako kladná je prací jaderné síly)
- a stejnou práci musíme vykonat (vnější síla) při eventuálním **rozložení jádra .**

$$\boxed{E = -W_{pot} = A_{jader.sil}}$$

Pro vytvoření ještě **většího jádra** je nutné přisunout další potřebný nukleon – přitom se vykoná nějaká další práce, rovná potenciální energii tohoto nukleonu v poli původních dvou nukleonů – a tento proces se opakuje až do vytvoření jádra požadovaného jádra.
Vazební energie takového jádra je pak samozřejmě **součtem všech vykonaných prací** při vzniku tohoto jádra a je stále rovna **práci potřebné pro rozložení jádra** na jednotlivé nukleony.

Přesun nukleonu (z velké vzdálenost, kde je nulový potenciál)) do místa minima potenciální energie znamená ale pokles (úbytek) jeho potenciální energie, která se přemění na **kinetickou energii** (nukleon je přitažlivou silou urychlován) – podle zákona zachování celkové energie musí mít kinetická energie **stejnou velikost** jako hloubka potenciální jámy, tj. jako ***E*** – a tuto kinetickou energii převezme vzniklé jádro a předává se ve stejné formě (kinetické energie) na další okolní částice – tedy při vzniku jádra z jednotlivých nukleonů současně vzniká (uvolňuje se) **tepelná energie** stejné velikosti jako je vazební energie vzniklého jádra :

$$\boxed{Q = E}$$

tepelná energie uvolněná při vzniku jádra

Tímto „**vznikem energie**" se také skvěle potvrzuje Einsteinův vztah ekvivalence hmoty a energie (zákon zachování hmoty a energie), proto při vzniku jádra také dochází ke **hmotnostnímu úbytku** – hmotnost jádra je menší než součet hmotností všech jednotlivých nukleonů :

$$\boxed{\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_j \neq 0}$$

hmotnostní úbytek jádra

A tento úbytek hmotnosti je podle Einsteinova vztahu přesně „vykompenzován" vzniklou tepelnou energií (rovnou vazební energii):

$$\boxed{E = \Delta m \cdot c^2}$$

vazební energie a hmotnostní úbytek

Vazební energie reálných jader jsou v rozmezí od 2,23 MeV u $^{2}_{1}H$ do 1640 MeV pro $^{209}_{83}Bi$.
Velmi zajímavou veličinu dostaneme, když vazební energii vydělíme počtem nukleonů v jádře, tj. když vypočítáme střední vazební energii na 1 nukleon :

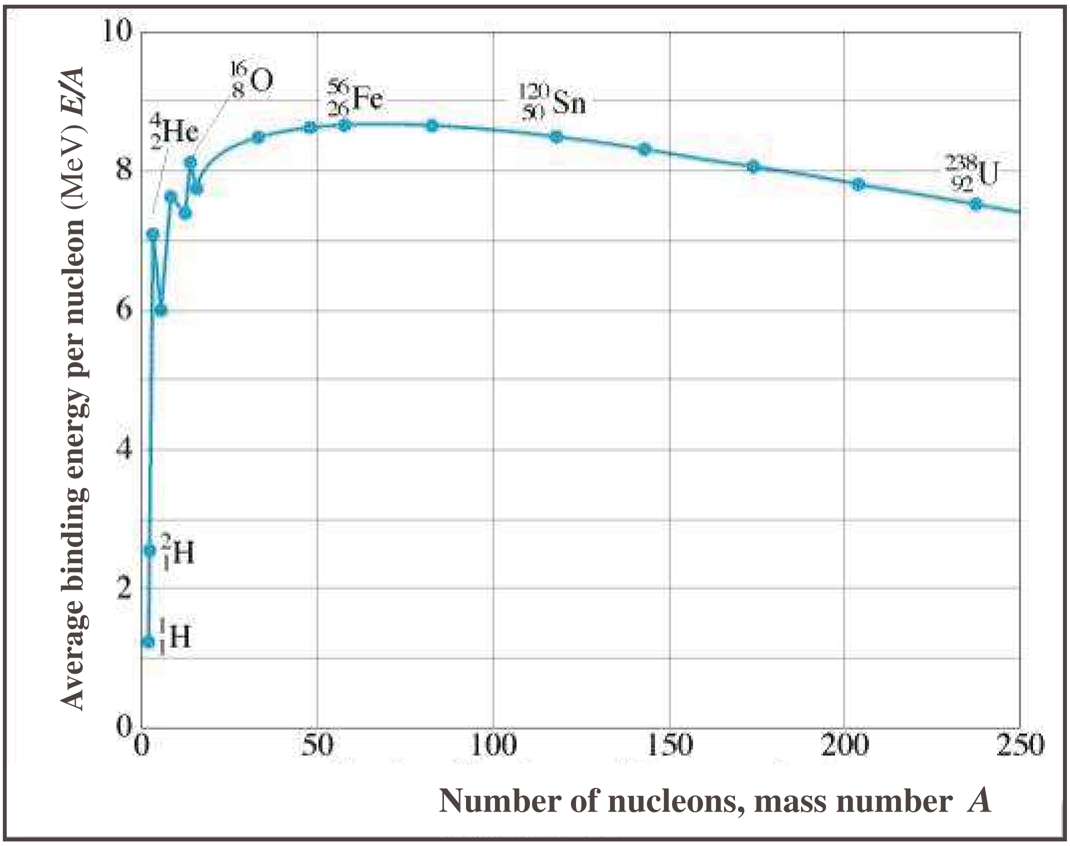
$$\boxed{\overline{E} = \frac{E}{A}}$$

střední vazební energie na 1 nukleon

Tato veličina totiž není konstantní, ale závisí na velikosti nukleonového čísla, tj. je jeho funkcí :

$$\overline{E} = \overline{E}(A)$$

Střední vazební energie dosahuje maxima pro středně těžká jádra a klesá u jader lehkých a velmi těžkých (viz obr.) :



Tento graf má **zásadní důležitost**, neboť ukazuje **dvě možnosti** „získání jaderné energie" – jako části vazební energie - při různých jaderných reakcích.

Uvažme postupně :

Při vzniku jádra (nebo souboru jader) z jednotlivých nukleonů se uvolní (tepelná) energie stejné velikosti jako (celková) vazební energie jádra (jader) :

$$Q = E$$

Když bychom zcela obecně předpokládali, že máme na počátku již nějaký soubor jader s celkovou vazební energií $E_{poč}$ a proběhne libovolné jaderná reakce, na jejímž konci vznikne jiný soubor jader s odlišnou celkovou vazební energií E_{kon}, potom celkové teplo uvolněné při této reakci bude zřejmě :

$$Q = E_{kon} - E_{poč}$$

(Neboť si můžeme představit, že jádra nejprve rozložíme na jednotlivé nukleony – k tomu musíme **vydat** energii $E_{poč}$ - a potom z nich vytvoříme konečná jádra – přitom **dostaneme** energii E_{kon})

Abychom energii **skutečně** získali, musí být toto teplo **kladné** (exoenergetická reakce) :

$$\boxed{Q = E_{kon} - E_{poč} > 0}$$

podmínka exoenergetické jaderné reakce

Celková vazební energie vzniklých (konečných) jader tedy musí být větší, než u jader počátečních. Při pohledu na graf závislosti střední vazební energie na nukleonovém číslem je zřejmé, že existují jen **dvě principiální možnosti jaderných exoenergetických reakcí** :

1) Syntéza lehkých jader

Na počátku máme dvě velmi lehká jádra, z oblasti kolem počátku našeho grafu $\overline{E} = \overline{E}(A)$, tj. :

1. jádro - s nukl. číslem A_1 a střední vaz. energií $\overline{E}_1$, má vazební energii $E_1 = A_1 \cdot \overline{E}_1$

2. jádro - s nukl. číslem A_2 a střední vaz. energií $\overline{E}_2$, má vazební energii $E_2 = A_2 \cdot \overline{E}_2$

Počáteční celková vazební energie je tedy :

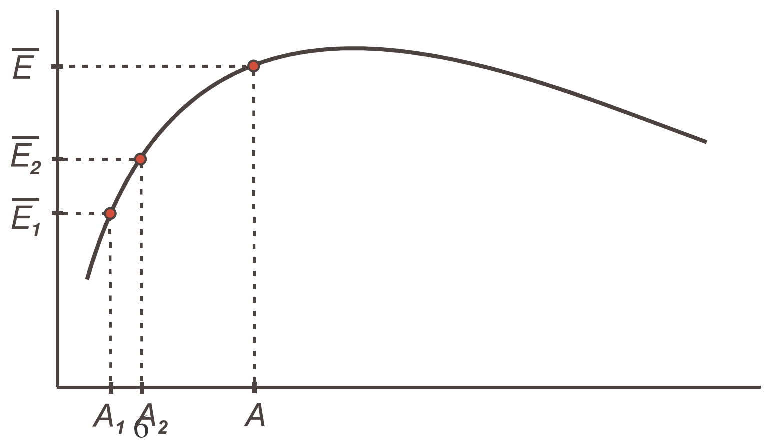
$$E_{poč} = E_1 + E_2 = A_1 \cdot \overline{E}_1 + A_2 \cdot \overline{E}_2$$

Při reakci se obě jádra spojí do výsledného jádra, které obsahuje všechny nukleony z obou počátečních jader, tedy jeho nukleonové číslo je :

$$A = A_1 + A_2$$

Protože je výsledné jádro těžší, je jeho střední vaz. energie větší než u výchozích jader $\overline{E}$ (viz graf - jsme na počáteční, levé, stoupající části křivky a blížíme se jejímu maximu) :

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{E} &> \overline{E}_1 \\ \overline{E} &> \overline{E}_2 \end{aligned}}$$



Vazební energii výsledného jádra je současně celkovou konečnou vazební energií :

$$E_{kon} = E = A \cdot \overline{E} = (A_1 + A_2) \cdot \overline{E}$$

Získané teplo při reakci bude :

$$Q = E_{kon} - E_{poč} = (A_1 + A_2) \cdot \overline{E} - (A_1 \cdot \overline{E}_1 + A_2 \cdot \overline{E}_2)$$

Jestliže roznásobíme a přeskupíme členy na pravé straně rovnice, dostaneme :

$$Q = A_1 \cdot (\overline{E} - \overline{E}_1) + A_2 \cdot (\overline{E} - \overline{E}_2)$$

Podle výše uvedených nerovností jsou v závorkách kladné výrazy, získané teplo je skutečně kladné, jde tedy skutečně o exoenergetickou reakci :

$$\boxed{Q = A_1 \cdot (\overline{E} - \overline{E}_1) + A_2 \cdot (\overline{E} - \overline{E}_2) > 0}$$

syntéza lehkých jader je exoenergetická reakce

Konkrétní reakce a podmínky viz dále v odstavci „Termojaderná syntéza“.

2) Štěpení těžkých jader

Na počátku máme jedno velmi těžké jádro, z oblasti kolem konce našeho grafu $\overline{E} = \overline{E}(A)$, tj. :

poč. jádro - s nukl. číslem A a střední vaz. energií $\overline{E}$, má vazební energii, která se rovná celkové počáteční energii :

$$E_{poč} = E = A \cdot \overline{E}$$

Při této reakci dojde k rozštěpení těžkého jádra na dvě jádra lehčí :

1. jádro - s nukl. číslem A_1 a střední vaz. energií $\overline{E}_1$, má vazební energii $E_1 = A_1 \cdot \overline{E}_1$
2. jádro - s nukl. číslem A_2 a střední vaz. energií $\overline{E}_2$, má vazební energii $E_2 = A_2 \cdot \overline{E}_2$

Konečná celková vazební energie je tedy :

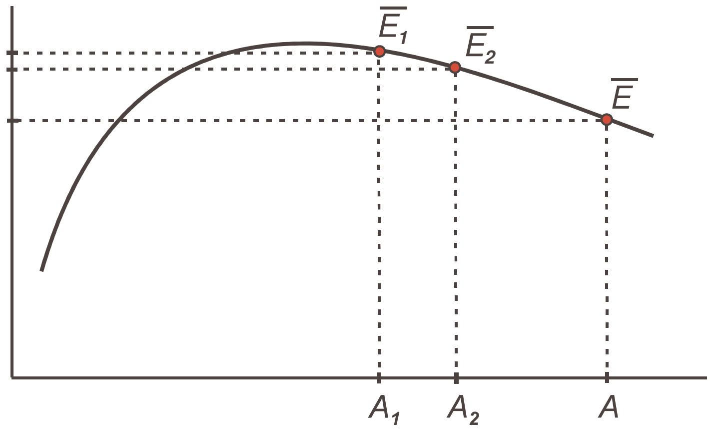
$$E_{kon} = E_1 + E_2 = A_1 \cdot \overline{E}_1 + A_2 \cdot \overline{E}_2$$

Všechny nukleony z obou jader pocházejí z původního těžkého jádra, pro nukleonová čísla tedy musí platit :

$$A = A_1 + A_2$$

Protože jsou výsledná jádra lehčí, jsou jejich střední vaz. energie větší , než u výchozího jádra (viz graf - jsme na pravé, klesající části křivky a blížíme se jejímu maximu) :

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{E}_1 > \overline{E} \\ \overline{E}_2 > \overline{E} \end{array}}$$



Získané teplo při reakci potom bude :

$$Q = E_{kon} - E_{poč} = (A_1 \cdot \overline{E}_1 + A_2 \cdot \overline{E}_2) - A \cdot \overline{E}$$

Dosadíme nejprve za nukleonové číslo počátečního jádra :

$$Q = E_{kon} - E_{poč} = (A_1 \cdot \overline{E}_1 + A_2 \cdot \overline{E}_2) - (A_1 + A_2) \cdot \overline{E}$$

Jestliže pak roznásobíme a přeskupíme členy na pravé straně rovnice, dostaneme :

$$Q = A_1 \cdot (\overline{E}_1 - \overline{E}) + A_2 \cdot (\overline{E}_2 - \overline{E})$$

Podle výše uvedených nerovností jsou v závorkách opět kladné výrazy, získané teplo je skutečně kladné, opět máme exoenergetickou reakci :

$$\boxed{Q = A_1 \cdot (\overline{E}_1 - \overline{E}) + A_2 \cdot (\overline{E}_2 - \overline{E}) > 0}$$

štěpení těžkých jader je exoenergetická reakce

Detailnější informace budou uvedeny dále v odstavci „Řetězová štěpná reakce“.

Proveďme nyní aspoň odhad uvolněné energie pro rozpad jádra s nukleonovým číslem $A = 240$, pro které je střední vazbová energie $\overline{E} = 7{,}7\ MeV$ na dvě přibližně stejná jádra s nukleonovými čísly $A_1 = A_2 = 120$ s vazbovou energií $\overline{E}_1 = \overline{E}_2 = 8{,}6\ MeV$:

$$Q = 120 \cdot (8{,}6 - 7{,}7) + 120 \cdot (8{,}6 - 7{,}7) = 220\ MeV$$

4) Jaderné reakce

Jsou to interakce jádra s jiným jádrem nebo částicí.
Nejčastějším způsobem provedení jaderné reakce je **ostřelování jader** v nějakém „**terči**“ různými **částicemi** (protony, neutrony, elektrony, fotony, α - částice,..) často **urychlenými** v urychlovačích na vysoké rychlosti (energie, měří se v MeV) - jako jedny z nejúčinnějších částic se ukázaly **neutrony.**

Základní typy reakcí jader s neutrony pak jsou :

- **pohlcení neutronu jádrem** – vznikne izotop, často radioaktivní, např.:

$$ {}^{107}_{47}Ag \quad + \quad {}^{1}_{0}n \quad \rightarrow \quad {}^{108}_{47}Ag^{*} $$ (radioaktivní, poločas rozpadu 2,3 min.)

- **pohlcení neutronu jádrem s následným uvolněním částice** neutrální nebo nabité – vznikne izotop (často radioaktivní) nebo dojde k přeměně (transmutaci) jádra, např.:

$$ {}^{14}_{7}N \quad + \quad {}^{1}_{0}n \quad \rightarrow \quad {}^{14}_{6}C^{*} \quad + \quad {}^{1}_{1}p $$ (radioaktivní (β), poločas rozpadu 10^4 let)

- **štěpení jader** – jádro se rozpadá na dvě nebo více částí. Energeticky důležitý je rozpad nejtěžších jader na dvě jádra středně těžká – poprvé pozorováno roku 1939 u uranu. Konkrétní rozpad tohoto jádra může probíhat v mnoha variantách, obecně lze psát :

$$ {}^{235}_{92}U \quad + \quad {}^{1}_{0}n \quad \rightarrow \quad X_1 \quad + \quad X_2 \quad + \quad (2-5)\cdot{}^{1}_{0}n $$
$$ (\; + \quad \beta - \text{částice} \quad + \quad \gamma - \text{částice} \quad + \quad 200\ MeV\;) $$

  <u>*Pozn. :*</u> Střední počet vzniklých neutronů je $\nu = 2{,}51$, 82% vzniklé energie nesou vzniklá jádra ve formě kinetické energie (tepla).

5) <u>Účinnost jaderné reakce</u> (při ostřelování terčových jader částicemi)

Jistě si umíme představit, že **dopad každé částice na terč nevyvolá jadernou reakci** – částice se totiž „nestrefí“ do žádného jádra (jsou přece velmi malé) a volně projde terčem.
Jestliže <u>celkem dopadlo</u> na terč n_1 částic a přitom se <u>uskutečnilo</u> n_2 zásahů jader (s očekávaným účinkem – jadernou reakcí), určuje poměr těchto veličin **účinnost** (výtěžek) reakce :

$$ \boxed{\eta = \frac{n_2}{n_1}} $$ <u>*účinnost jaderné reakce*</u>

Když si uvědomíme, že nedokážeme řídit dráhu dopadající částice tak, aby dopadla na konkrétní jádro, pak zásah jádra (a vzniklá rekce) je vlastně **náhodný proces** a výše uvedená veličina je poměrem „úspěšných pokusů“ a „celkového počtu pokusů“ – je to tedy **pravděpodobnost** dané reakce :

$$ \boxed{P = \eta = \frac{n_2}{n_1}} $$ <u>*pravděpodobnost jaderné reakce*</u>

Využití tohoto vztahu :
Kdybychom dokázali nezávisle určit pravděpodobnost reakce, pak by bylo možno pro každý počet částic vyslaných (dopadlých) na terč <u>určit počet jaderných reakcí</u> :

$$ n_2 = P \cdot n_1 $$

Tuto pravděpodobnost lze skutečně určit následujícím způsobem :

Představme si nejprve, že nějaká částice (například neutron) nalétává na **plošný terč** – tj. plošku velikosti S , na která jsou v (jedné vrstvě) rozmístěny jednotlivé „cíle" – jádra v celkovém počtu Z (viz obr.) :

Ve směru pohybu dopadající částice se tato jádra jeví jako malé plošky o velikosti σ (příčný geometrický průřez jádra) a očekávaná reakce nastane jistě pouze tehdy, když částice zasáhne některé z terčových jader.
O několik řádek výše jsme již konstatovali, že zásah jádra je náhodný proces , nemůžeme ho tedy řídit a vypočítat, ale můžeme obecně uvážit, že při velkém počtu n_1 dopadlých částic na terč bude počet zásahů n_2 jader - a tedy bude (podle výše uvedené rovnice) i **pravděpodobnost** zásahu (reakce) - **tím větší**, čím **více** bude jader na ploše terče a čím **větší** budou jádra, tedy i jejich příčný průřez :

$$P = konst \cdot Z \cdot \sigma$$

Podle této rovnice vlastně můžeme konstatovat, že pravděpodobnost zásahu jádra je **přímo úměrná součinu** počtu jader a průřezu jádra, což je **celková plocha všech jader** (S') na terči.
Nyní můžeme uvážit **mezní (teoretickou) situaci**, kdyby tato celková plocha všech jader byla rovná ploše terče ($Z \cdot \sigma = S$) – tj. kdyby jádra dokonale pokryla (zakryla) celý terč - pak by ovšem každá částice dopadlá na terč **vždy zasáhla** nějaké jádro – tedy pravděpodobnost zásahu by byla 1 (100 %) :

$$1 = P = konst \cdot Z \cdot \sigma = konst \cdot S$$

Z této jakési „okrajové podmínky" dostáváme hodnotu konstanty :

$$konst = \frac{1}{S}$$

Po dosazení do vztahu pro pravděpodobnost tak bude :

$$\boxed{P = \frac{Z \cdot \sigma}{S} = \frac{S'}{S}}$$

pravděpodobnost reakce určuje poměr ploch jader a terče

Pravděpodobnost zásahu jádra – a očekávané jaderné reakce – je dána poměrem celkové (příčné) plochy všech jader a plochy terče.

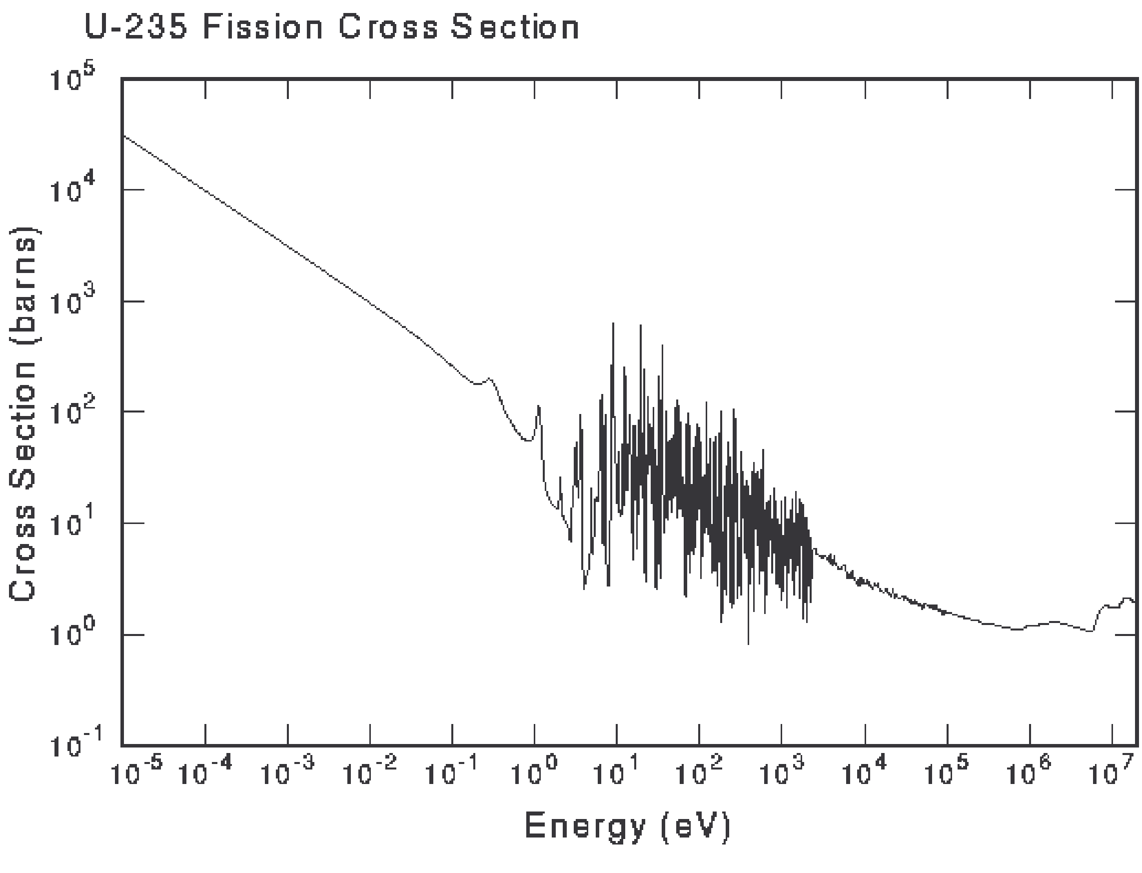
Vidíme, že pro určení pravděpodobnosti reakce dopadající částice s jádrem je zásadně důležitý příčný geometrický průřez jádra σ , a protože se ukázalo, že analogickou veličinu lze použít při jakékoliv interakci dvou libovolných částic, používá se pro ni speciální název ***účinný průřez reakce*** a definuje se jako plocha se středem v dané (terčové) částici, kterou musí zasáhnout jiná (dopadající) částice, aby nastala požadovaná reakce.

Pozn. : Jednotkou je v SI samozřejmě 1 m^2, v jaderné fyzice se často také používá jednotka, která se přibližně rovná příčnému průřezu středně těžkého jádra :

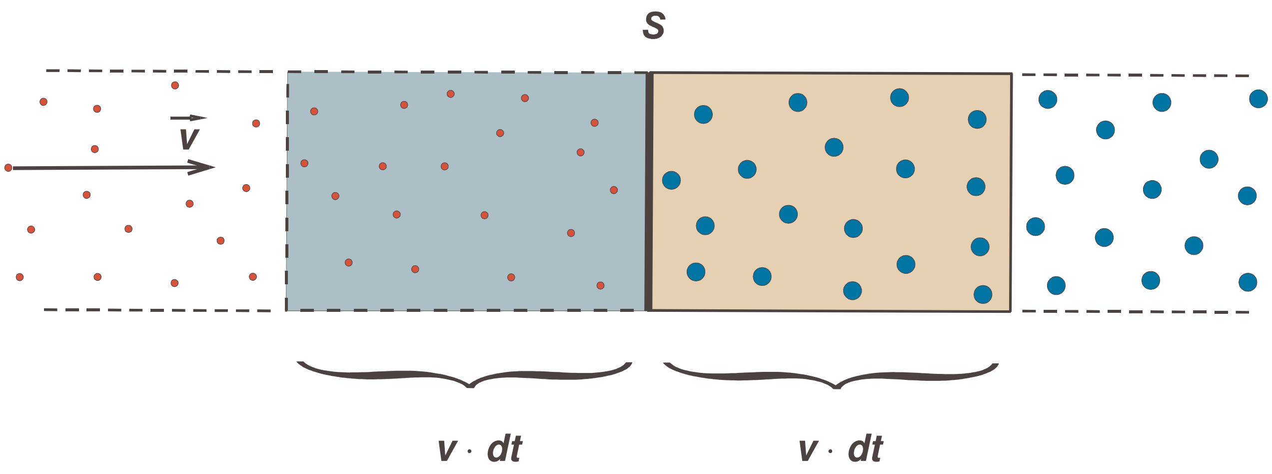
$$\boxed{1\,barn = 1 \cdot 10^{-28} \ m^2}$$

Jistě nás nepřekvapí, že účinný průřez reakce σ závisí na druhu obou částic a na druhu jejich reakce, ale na první pohled bude nepochopitelné, že účinný průřez reakce může také ještě **záviset na rychlosti (energii) nalétající částice** – což znamená, že účinný průřez se může lišit od příčného průřezu terčové částice.

Příkladem takové závislosti je velmi důležitá závislost účinného průřezu štěpení jádra uranu $^{235}_{92}U$ na energii dopadlého neutronu (viz obr) :



Nyní můžeme přistoupit k dalšímu obecnějšímu a také reálnějšímu případu, kdy částice (například neutrony) dopadají na terčová jádra, která jsou rozmístěna ne na pouhé ploše, ale v nějakém **prostorovém terči** , který má čelní plochu S (jako například palivo v jaderném reaktoru) :



Je zřejmé, že můžeme dobře využít minulé výsledky : jádra jsou (pravidelně) rozmístěna v nějakém objemu – což je dáno rozmístěním atomů v krystalické mřížce - při jejich malé velikosti se jistě nevyskytnou „jádra v zákrytu“, je to velmi „**řídké**“ uspořádání (rozměry jader jsou řádu fermi a meziatomové vzdálenost v mřížce – tj. vzdálenosti atomů - jsou řádu angströmů - stotisíckrát větší a prostor mezi atomy je vyplněn elektrony - pro neutron je to prakticky vakuum, elektron je téměř 2000 - krát lehčí než neutron , náraz do něj neutron „nepozná“ – je to jako náraz míče do osobního auta)

Ve směru pohybu dopadající částice se **jádra** v jakékoliv hloubce terče **stále jeví jako malé plošky** velikosti σ , ale jejich **počet**, který může vstoupit do reakce s částicí - tj. počet jader, která mohou být zasažena - není konstantní, jako byl na plošném terči, ale **závisí** na délce dráhy částice v terči – tj. na její **hloubce vniku** do objemu terče.
Jestliže bychom předpokládali, že částice dopadající na terč plochy S letí **rychlostí** v, potom za nějaký **zvolený časový interval** dt (od okamžiku dopadu na čelní plochu terče) urazí dráhu délky $v \cdot dt$ a přitom tak **může zasáhnout všechny cíle** – jádra – v objemu $S \cdot v \cdot dt$.
Při hustotě (koncentraci) jader N je tento počet jader $N \cdot S \cdot v \cdot dt$ a **poměr** jejich celkové plochy $\sigma \cdot N \cdot S \cdot v \cdot dt$ a čelní plochy terče S opět určí **pravděpodobnost zásahu** jádra částicí (a tedy také jaderné reakce) – pozor, ale tentokrát **za zvolený čas** dt :

$$\boxed{P = \frac{S'}{S} = \frac{\sigma \cdot N \cdot S \cdot v \cdot dt}{S} = \sigma \cdot N \cdot v \cdot dt}$$

<u>pravděpodobnost jaderné reakce za zvolený čas dt</u>

Abychom dále mohli využít tento vztah pro stanovení konkrétního počtu jaderných reakcí, je potřeba ještě určit, kolik částic dopadá na terč : někdy se na terč vrhají jednotlivé částice, ale většinou jsou tyto částice rozloženy v prostoru s nějakou koncentrací n a pohybují se všechny určitou rychlostí v (často na terč dopadá přesně definovaný částicový tok, svazek částic stejné rychlosti, viz obr.) :

Potom za výše **zvolený čas** dt dopadnou na terč **všechny částice**, které jsou (na počátku zvoleného časového intervalu dt) **před terčem a až do maximální vzdálenosti** $v \cdot dt$ (kterou mohou urazit za tento čas) – tzn. všechny částice, které jsou před terčem v objemu $S \cdot v \cdot dt$. Při hustotě (koncentraci) částic n je tedy počet dopadlých částic :

$$n_1 = n \cdot S \cdot v \cdot dt$$

Tyto částice,dopadlé během času dt na čelní plochu terče S , vnikají do objemu terče a projdou až do **maximální hloubky** $v \cdot dt$ - zasáhnou tedy objem terče $S \cdot v \cdot dt$ a **v tomto objemu se během času** dt uskuteční celkový počet reakcí :

$$n_2 = P \cdot n_1 = \sigma \cdot N \cdot v \cdot dt \cdot n \cdot S \cdot v \cdot dt$$

Výsledek je ponechán v neupravené formě, neboť ho ještě vydělíme velikostí objemu, ve kterém proběhnou reakce a dostaneme tak počet reakcí během času dt v jednotkovém objemu terče :

$$n_2' = \frac{n_2}{S \cdot v \cdot dt} = \sigma \cdot N \cdot v \cdot dt \cdot n$$

A ještě provedeme vydělení časem dt :,

$$n_2'' = \frac{n_2'}{dt} = \sigma \cdot n \cdot N \cdot v$$

A vzniklý vztah bude pak vyjadřuje **počet reakcí, které se uskuteční v jednotkovém objemu terče za jednotku času** :

$$\boxed{n_2'' = \sigma \cdot n \cdot N \cdot v}$$

počet reakcí v 1 objemu za 1 času

Tuto rovnici dále aplikujeme při podrobnějším rozboru obou možností využívání jaderné energie :

6) Dva způsoby získání jaderné energie

a) *Řetězová štěpná reakce*

Využívá se zejména štěpení jader uranu a plutonia pomocí neutronů – při tom se těžké jádro rozpadá na dvě lehčí jádra, uvolňuje se energie a několik dalších neutronů :

$$\boxed{{}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow X_1 + X_2 + \nu \cdot {}^{1}_{0}n + 200\ MeV \quad (+ \ \beta - \text{částice} + \gamma - \text{částice})}$$

Tyto neutrony mohou způsobit další a další štěpení - nastane **řetězová štěpná reakce**, kdy se spojitě uvolňuje energie zejména ve formě tepla.
Nejběžnější palivo pro jaderný reaktor je **přírodní uran**., který ale obsahuje jen necelé procento štěpného uranu :

$$\boxed{0{,}72\ \%\ {}^{235}_{92}U + 99{,}27\ \%\ {}^{238}_{92}U + 0{,}01\ \%\ {}^{234}_{92}}$$

Z hlediska spojité činnosti reaktoru – aby se nepřerušila řetězová rekce – musí být stále k dispozici dostatečný počet neutronů. Rozdělme si tedy procesy v reaktoru podle hlediska, zda při nich neutrony vznikají, nebo zanikají :

a) **Reakce, při nichž vznikají neutrony**

Neutrony vznikají pouze při vlastním rozštěpení jádra uranu $^{235}_{92}U$ po dopadu neutronu podle reakce :

$$\boxed{\begin{array}{l} ^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow X_1 + X_2 + \nu \cdot {}^{1}_{0}n \\ \qquad\qquad (+ \ \beta - \check{c}\acute{a}stice + \gamma - \check{c}\acute{a}stice + 200\ MeV) \end{array}}$$

Všechny neutrony v reaktoru mají po zpomalení v moderátoru přibližně stejné rychlosti v odpovídající energii asi 0,03 MeV , při které je účinný průřez štěpné reakce průměrně $\sigma = 550\ barn$. Jestliže označíme koncentraci štěpných jader uranu N a koncentraci neutronů n , pak podle minulého odstavce je počet jaderných reakcí (štěpení jader) v jednotce objemu reaktoru za jednotku času :

$$\sigma \cdot n \cdot N \cdot v$$

Protože při **každém štěpení** vznikne podle horní rovnice průměrně ν = 2,51 neutronů, znamená to, že v jednotce objemu vznikne za jednotku času celkem neutronů :

$$\boxed{\sigma \cdot n \cdot N \cdot v \cdot \upsilon}$$

b) **Reakce, při nichž zanikají neutrony**

Těchto reakcí probíhá v reaktoru podstatně více :

1) Při **vlastní štěpné reakci** zanikne vlastně ten neutron, který dopadl na jádro a způsobil jeho rozštěpení. Celkový počet takto zaniklých neutronů v jednotce objemu za jednotku času je roven počtu proběhnutých reakcí, určených předchozí rovnicí :

$$\boxed{\sigma \cdot n \cdot N \cdot v}$$

2) Další neutrony zanikají tehdy , když jádro uranu $^{235}_{92}U$ se při dopadu neutronu nerozštěpí a dojde pouze k tzv. **neštěpnému záchytu neutronu** (stane se asi u 15 % neutronů, vzniklý izotop uranu je nestabilní – radioaktivní – a dále se rozpadá) :

$$\boxed{^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{236}_{92}U^{*} \xrightarrow{\alpha - rozpad} {}^{232}_{90}Th + {}^{4}_{2}He}$$

Tato reakce má účinný průřez asi $\sigma_z = 101\ barn$ a počet zaniklých neutronů v jednotce objemu za jednotku času je opět roven počtu těchto jaderných reakcí :

$$\boxed{\sigma_z \cdot n \cdot N \cdot v}$$

3) Hlavní podíl v palivu má uran ${}^{238}_{92}U$ (více než 99 % , jeho koncentraci označíme N_1), který se po dopadu neutronu nikdy neštěpí a proběhne tedy opět **neštěpný záchyt neutronu**, znamenající jeho zánik (vzniklý izotop uranu je také radioaktivní, a dále se rozpadá):

$$\boxed{{}^{238}_{92}U \quad + \quad {}^{1}_{0}n \quad \rightarrow \quad {}^{239}_{92}U^{*} \quad \xrightarrow{\beta-rozpad}\rightarrow \quad {}^{239}_{93}Np \quad + \quad {}^{0}_{-1}e}$$

Tato reakce má účinný průřez asi $\sigma_{z1} = 2{,}8\ barn$ a počet zaniklých neutronů v jednotce objemu za jednotku času je opět roven počtu těchto jaderných reakcí :

$$\boxed{\sigma_z^1 \cdot n \cdot N_1 \cdot v}$$

4) Neutrony mohou být zachyceny také jádra všech možných dalších příměsí v palivu, vzniklými jádry z výše uvedených reakcí, konstrukčními díly reaktoru, …..
Principiálně důležitý je (neštěpný) záchyt neutronů **regulačními tyčemi** reaktoru (z kadmia, bóru) :

$$\boxed{\sigma_z^{reg} \cdot n \cdot N_{reg} \cdot v}$$

5) Je zajímavé, že úbytek neutronů je často (ne vždy) spojen s „obyčejným“ **pružným odrazem** (rozptylem) neutronu na jádrech uranu, případně i na jiných jádrech – neutron sice nezanikne, pouze změní směr letu – ale k další reakci již nestačí dojít a neutron unikne z reaktoru. Počet zaniklých neutronů v jednotce objemu za jednotku času je opět roven počtu těchto reakcí :

$$\boxed{\sigma_R \cdot n \cdot N_R \cdot v}$$

Tedy celkem máme jeden přírůstek a několik úbytků neutronů v 1 objemu za 1 času - dohromady vytvářejí časovou změnu (za 1 času) neutronů v 1 objemu, tedy **časovou změnu koncentrace** neutronů :

$$\frac{dn}{dt} = \sigma \cdot n \cdot N \cdot v \cdot \upsilon - \sigma \cdot n \cdot N \cdot v - \sigma_z \cdot n \cdot N \cdot v - \sigma_z^1 \cdot n \cdot N_1 \cdot v - \sigma_z^{reg} \cdot n \cdot N_{reg} \cdot v - \sigma_R \cdot n \cdot N_R \cdot v$$

Rovnici upravíme vytknutím :

$$\frac{dn}{dt} = n \cdot v \cdot \left(\sigma \cdot N \cdot (\upsilon - 1) - \sigma_z \cdot N - \sigma_z^1 \cdot N_1 - \sigma_z^{reg} \cdot N_{reg} - \sigma_R \cdot N_R \right)$$

Výraz v závorce označíme jako novou veličinu :

$$K = \sigma \cdot N \cdot (\upsilon - 1) - \sigma_z \cdot N - \sigma_z^1 \cdot N_1 - \sigma_z^{reg} \cdot N_{reg} - \sigma_R \cdot N_R$$

Za předpokladu (již uvedeného výše), že všechny neutrony v reaktoru jsou zpomaleny moderátorem na přibližně stejné energie, je tato veličina přibližně **konstantní** (stejně jako rychlost neutronů) :

$$\boxed{\begin{aligned} K &= konst. \\ v &= konst. \end{aligned}}$$

Pak dostáváme jednoduchou diferenciální rovnici, kterou upravíme separací proměnných :

$$\frac{dn}{n} = K \cdot v \cdot dt$$

Rovnici integrujeme určitým integrálem, za předpokladu, že v počátečním čase $t = 0$ je nějaká počáteční koncentrace neutronů $n = n_o$ ...

$$[\ln n]_{n_o}^{n} = K \cdot v \cdot [t]_0^t$$

Po dosazení mezí :

$$\ln \frac{n}{n_o} = K \cdot v \cdot t$$

Koncentraci osamostatníme pomocí vztahu logaritmu a exponenciely :

$$\frac{n}{n_o} = e^{K \cdot v \cdot t}$$

A dostaneme tak časový průběh koncentrace neutronů v pracujícím štěpném reaktoru :

$$\boxed{n = n_o \cdot e^{K \cdot v \cdot t}}$$

koncentrace neutronů v reaktoru

Na základě této rovnice můžeme udělat jednoduchou úvahu : aby řetězová reakce nezanikla, nesmí počet neutronů (koncentrace) klesat – musí tedy být alespoň **konstantní, nebo mírně růst** – exponent tedy musí být nezáporný :

$$\boxed{K \geq 0}$$

Po dosazení dostáváme základní podmínku pro činnost štěpného reaktoru :

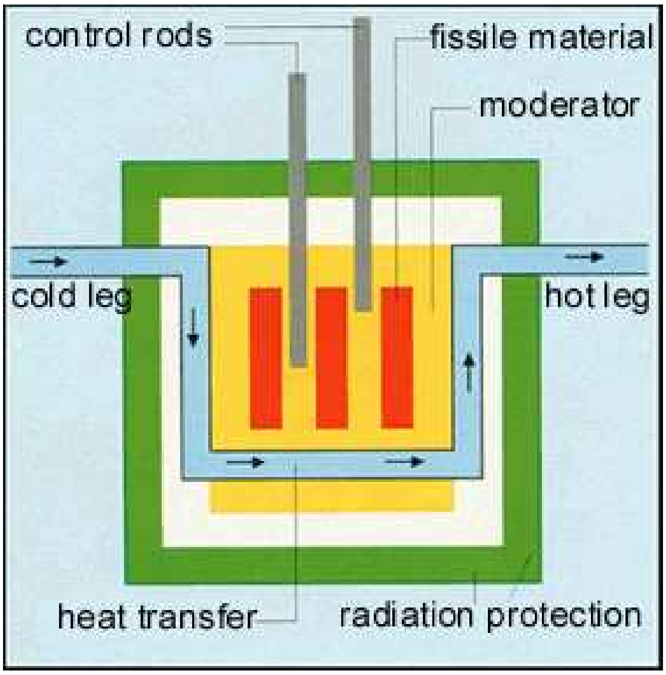
$$\boxed{\sigma \cdot N \cdot (\upsilon - 1) \geq \sigma_z \cdot N + \sigma_z^1 \cdot N_1 + \sigma_z^{reg} \cdot N_{reg} + \sigma_R \cdot N_R}$$

podmínka udržení řetězové štěpné reakce

Pro zajištění této nerovnosti tedy musíme tedy zejména zajistit dostatečně vysokou hodnotu levé strany:

- Zvýšit koncentraci štěpných jader uranu – **obohacování** paliva (lze až na 10% - drahé)
- Zvýšit účinný průřez štěpení – zajistíme snížením energie neutronů vznikajících při štěpení (mají energie řádu několik MeV). K tomu slouží **moderátor** (H_2O, D_2O, grafit, Be, Li,..) – kdy neutrony ztrácejí energii při srážkách s lehkými jádry
- Omezení úniku neutronů z reaktoru (reflektory, odražeče)

Na druhé straně – počet neutronů v reaktoru nesmí příliš rychle růst – průběh reakce je řízen **regulátory** ve tvaru tyčí (**řídicí tyče**, které se zasouvají do reaktoru) – jsou z materiálu silně pohlcujícího neutrony (kadmium, bor) a udržují stabilní úroveň řetězové štěpné reakce – **kritický stav reaktoru.**

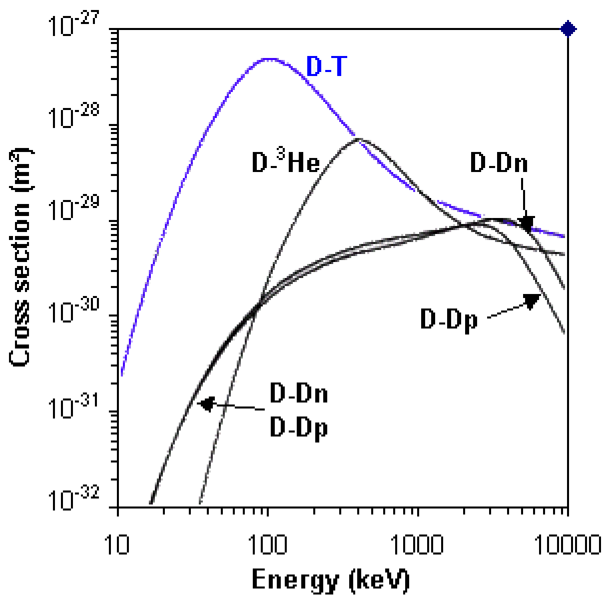


Existuje několik druhů štěpných reaktorů - liší se zejména druhem moderátoru a způsobem odběru tepla z reaktoru k dalšímu využití.
Temelín – moderátorem je obyč.voda, palivo musí být více obohaceno.
Černobyl – moderátorem byl grafit, palivo může být méně obohaceno (viz dodatek).

b) Termonukleární syntéza (fúze)

Jde o slučování lehkých jader za velmi vysokých teplot.

V principu se mohou slučovat nejlehčí jádra vodíku a z hlediska jejich značného výskytu by se tyto reakce mohly zdát nejvýznamnější, vykazují však nepatrné účinné průřezy (jádro „obyčejného“vodíku má i nejmenší geometrický průřez – tvoří ho jediný nukleon), proto reakce H – H, H – D, H – T nepřipadají v úvahu pro energetické využití (probíhají na Slunci).
Vzájemné srážky těžších izotopů vodíku mají ovšem účinné průřezy daleko větší (viz obr. – povšimněte si, že nejsou konstantní a mají určitou mez).



Z hlediska důležitosti pro energetické využití připadají v úvahu zejména následující tři reakce :

1) **Syntéza jádra deuteria a jádra tritia** (reakce **D – T**) (vodíková bomba)

$$\boxed{{}^{2}_{1}D \;+\; {}^{3}_{1}T \;\rightarrow\; {}^{4}_{2}He \;+\; {}^{1}_{0}n \qquad (+\;\; 17{,}6\;MeV\;)}$$

Tato reakce má nejvyšší účinný průřez – v maximu asi 5 barn. Přibližně 80% uvolněné energie nesou rychlé neutrony ve formě kinetické energie, která se při zabrždění v moderátoru přemění na tepelnou energii.

2) **Syntéza dvou jader deuteria** (reakce **D – D**) , probíhá ve dvou variantách s celkovým účinným průřezem v maximu 0,1 barn:

- neutronová větev :

$$\boxed{{}^{2}_{1}D \;+\; {}^{2}_{1}D \;\rightarrow\; {}^{3}_{2}He \;+\; {}^{1}_{0}n \qquad (+\;\; 3{,}3\;MeV\;)}$$

- nebo protonová větev :

$$\boxed{{}^{2}_{1}D \;+\; {}^{2}_{1}D \;\rightarrow\; {}^{3}_{1}T \;+\; {}^{1}_{1}p \qquad (+\;\; 4{,}0\;MeV\;)}$$

Zde až 60% uvolněné energie tvoří kinetická energie protonů. (jader „obyčejného“ vodíku).

3) Možná je i **syntéza jádra deuteria a jádra izotopu helia** , která je také energeticky dosti výhodná, ale má malý účinný průřez (0,8 barn) :

$$\boxed{{}^{2}_{1}D \;+\; {}^{3}_{2}He \;\rightarrow\; {}^{4}_{2}He \;+\; {}^{1}_{1}p \qquad (+\;\; 18{,}3\;MeV\;)}$$

Proč se vlastně v souvislost se syntézou jader mluví o nutnosti vysokých teplot ?

Předpokládá se totiž, že by slučování jader neprobíhalo za situace ostřelování pevných terčových jader, ale že by se použilo **plazma** vzniklé z plynu potřebných izotopů vodíku. V plazmatu se totiž všechny jeho částice, tedy i jádra, pohybují **neuspořádaným pohybem**, přitom se tedy vlastně „automaticky" navzájem ostřelují, jádra jsou tak současně částicemi terčovými i nalétávajícími a při vzájemných srážkách může docházet k jejich syntéze.
Aby proběhla jaderná reakce, musí se jádra dostat do velmi malé vzájemné vzdálenosti (aby mohly zapůsobit jaderné síly) – tomu ovšem brání velké **elektrostatické odpudivé síly** mezi kladnými jádry.
Proto je nutná **vysoká kinetická energie** nalétávajících jader, která by překonala potenciální energii odpudivých sil - tzn. je nutná **vysoká teplota plazmatu** (viz vztah pro vnitřní energii plynu).

Potenciální energie Coulombovských sil dvou jader s protonovými čísly Z_1 a Z_2 ve vzájemné vzdálenosti r je dána vztahem :

$$W_p(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{4\pi\varepsilon_o r}$$

Dosadíme-li pro dvě jádra deuteria a tritia, jako izotopy vodíku $Z_1 = Z_2 = 1$ a vzdálenost několik fermi, například $r = 2\ f$, dostaneme po převodu na elektronvolty :

$$W_p = 0{,}72\ MeV$$

Stejně veliká, nebo větší, pak musí být kinetická energie nalétávajícího jádra, případně v těžišťovém systému lze tuto energii lze rozdělit na obě jádra (což lépe odpovídá skutečnosti – v plazmatu se přece pohybují všechny jeho částice) :

$$W_{kin} \approx 0{,}36\ MeV$$

Další zásadní vlastnost plazmatu (a plynu obecně) - kromě neustálého neuspořádaného pohybu jeho částic - je proměnlivá velikost rychlosti tohoto pohybu, v intervalu od nuly do nekonečna (viz Maxwellovo rozdělení rychlostí). Pak máme zřejmě jedinou možnost – považovat výše uvedenou energii za střední hodnotu kinetické energie - a použít známý vztah pro tuto energii (v termodynamické rovnováze) :

$$W_{kin} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \approx 0{,}36\ MeV$$

Dostaneme :

$$\boxed{T \approx 2{,}8 \cdot 10^9\ K}$$

Výsledek potvrzuje náš výchozí předpoklad o využití plazmatu pro realizaci syntézy jader – při tak vysokých teplotách se bude **každá látka vždy nacházet ve stavu plazmatu**, ve kterém (jako důsledek vysokých energií) budou všechny atomy rozloženy na jádra a elektrony - to je tzv. **vysokoteplotní plazma** (neobsahuje neutrální atomy a molekuly, ani jejich ionty).

Syntéza jader bude ve skutečnosti probíhat ve vysokoteplotním plazmatu i při teplotách až o dva řády nižších – stačí tedy „pouhé" desítky miliónů stupňů – neboť **část jader v plazmatu má vyšší energie** (rychlosti) než je **střední** hodnota energie (viz Maxwellovo rozdělení), a také se uplatňuje **tunelový jev** pro přechod potenciální bariérou elektrostatických odpudivých sil.

Lawsonovo kriterium

Je zřejmé, že při uvedených teplotách neexistuje hmotná nádoba, která by udržela vysokoteplotní plazma v nějakém omezeném objemu. I když bychom udržovali plazma ve vymezeném prostoru působením silových polí (zejména je vhodné pole magnetické) velká **část jeho částic dokáže unikat** (mají vysoké rychlosti) a protože s sebou odnášejí svoji energii, dochází ke **ztrátám** celkové energie plazmatu, k jeho **rozpadání** a následně k jeho **zániku**.
Pro úvahu o možném využití jaderné energie při termojaderné syntéze je proto zásadně důležité, aby **doba existence** vysokoteplotního plazmatu byla **co nejdelší**.

Ztráty energie způsobené rozpadem plazmatu (a také jeho zářením) musí tedy být **alespoň nahrazovány energií vznikající při syntéze jader a předávané plazmatu ve formě tepelné energie** (a teprve její případný přebytek může být využíván) :

Jestliže tedy označíme :

$\boxed{E_{př.}^{tep.}}$ tepelná energie předaná plazmatu z termojaderné syntézy (v 1 objemu za 1 času)

$\boxed{E_{ztr.}^{rozp.}}$ tepelná energie plazmatu ztracená rozpadem plazmatu (v 1 objemu za 1 času)

$\boxed{E_{ztr.}^{zář.}}$ tepelná energie plazmatu ztracená zářením plazmatu (v 1 objemu za 1 času)

Pak můžeme napsat nerovnost :

$$\boxed{E_{př.}^{tep.} \geq E_{ztr.}^{rozp.} + E_{ztr.}^{zář.}}$$

podmínka udržení vysokoteplotního plazmatu

Vypočítejme nejprve energii vznikající při termojaderné syntéze :

Použijeme dříve odvozený vztah pro počet reakcí, které se uskuteční v jednotkovém objemu terče za jednotku času :

$$n_2'' = \sigma \cdot n \cdot N \cdot v$$

V plazmatu je ovšem situace odlišná – pohybují se nejen jádra dopadající, ale i jádra terčová. Pohyb je ovšem relativní, závislý na volbě vztažné soustavy, mohu si tedy představit, že terčové jádro je v klidu a nalétávající jádro se pohybuje vzájemnou (relativní) rychlostí. Protože všechny částice v plazmatu se pohybují nespořádanými rychlostmi, jsou takové i relativní rychlosti libovolných dvou částic – mají všechny možné směry a všechny možné velikosti od nuly do nekonečna.
V tom je pak ale hlavní potíž při aplikaci uvedeného vztahu – odvodili jsme ho přece pro nalétávající částice, které se všechny pohybují stejnou rychlostí – budeme ho tedy aplikovat postupně : ze všech nalétávajících částic v plazmatu vezmeme pouze ty, které se pohybují rychlostí v .
K tomu se hodí Maxwellovo rozdělení, které nám určuje, že z celkového počtu částic n (v 1 objemu) má danou rychlost v (v intervalu dv) počet částic :

$$dn = f \cdot dv$$ (kde f je Maxwellova rozdělovací funkce)

Pak je počet reakcí **této skupiny částic** (jader) se všemi ostatními částicemi (jádry s koncentrací N, které jsou v relativním klidu) :

$$\sigma \cdot dn \cdot N \cdot v \;=\; \sigma \cdot f \cdot dv \cdot N \cdot v$$

A abychom dostali počet reakcí **všech jader** počtu (koncentrace) n s jádry koncentrace N, musíme sečíst – integrovat – tento výraz přes všechny možné rychlosti jader od nuly do nekonečna (z integrálu lze vytknout pouze N, vše ostatní jsou funkce rychlosti, i účinný průřez) :

$$\int_0^\infty \sigma \cdot f \cdot dv \cdot N \cdot v \;=\; N \cdot \int_0^\infty \sigma \cdot v \cdot f \cdot dv$$

V dalším kroku pravou stranu formálně vynásobíme a vydělíme n :

$$N \cdot \int_0^\infty \sigma \cdot v \cdot f \cdot dv \;=\; N \cdot n \cdot \frac{1}{n} \cdot \int_0^\infty \sigma \cdot v \cdot f \cdot dv$$

Ve vztahu tak vlastně vznikne **střední hodnota součinu rychlosti a účinného průřezu** (která je analogická např. středním hodnotám rychlostí neuspořádaného pohybu, viz kinetická teorie plynů) :

$$\boxed{\overline{\sigma\, v} \;=\; \frac{1}{n} \cdot \int_0^\infty \sigma \cdot v \cdot f \cdot dv}$$

Dostaneme tedy opět formálně jednoduchý vztah pro počet jaderných reakcí v plazmatu :

$$\boxed{n_2'' \;=\; N \cdot n \cdot \overline{\sigma\, v}}$$

počet reakcí za 1 času v 1 objemu plazmatu

Tento vzorec má principiálně stejný tvar jako pro interakci nalétávajících částic na pevný terč.
Pro další použití si ještě uvědomíme **význam součinu koncentrací** obou druhů jader $N \cdot n$: je to **počet všech možných dvojic** jader v 1 objemu, která spolu mohou reagovat – tedy počet **všech možných reakcí** – a zbylý člen $\overline{\sigma\, v}$ je pak pravděpodobnost reakce za 1 času.

Nalezneme ještě konkrétní tvar rovnice pro dva základní druhy plazmatu odpovídající dvěma základním použitelným reakcím jaderné syntézy, tj. **D-T** a **D-D** .

- ***Reakce D-T***

Jestliže označíme n koncentraci všech jader v plazmatu, pak za předpokladu stejného zastoupení D i T v plazmatu, dostaneme pro počet reakcí :

$$n_2'' \;=\; \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \overline{\sigma\, v} \;=\; \frac{n^2}{4} \cdot \overline{\sigma\, v}$$

- ***Reakce D-D***

Označíme opět jako n koncentraci všech jader v plazmatu - v tomto případě se však jedná o jádra pouze jednoho druhu (D) , nemůžeme proto rozlišit nalétající a terčová jádra – každé jádro vlastně nalétává na všechna ostatní jádra.
Matematická kombinatorika nám však umožňuje stanovit počet **všech možných dvojic** jader v 1 objemu (viz výše), která spolu mohou reagovat :

$$\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

Pro počet reakcí tedy dostáváme :

$$n_2'' = \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \overline{\sigma v} = \frac{n^2}{2} \cdot \overline{\sigma v}$$

Získané vztahy jsou velmi podobné, můžeme proto zobecnit pro oba typy reakcí v plazmatu :

$$\boxed{n_2'' = A \cdot n^2 \cdot \overline{\sigma v}}$$

počet reakcí za 1 času v 1 objemu plazmatu

$$A = \begin{cases} \tfrac{1}{2} & pro\ D-T \\ \tfrac{1}{2} & pro\ D-D \end{cases}$$

Jestliže dále označíme jako ε energii uvolněnou při jedné jaderné reakci, pak bude celková energie uvolněná za 1 času v 1 objemu plazmatu …

$$A \cdot n^2 \cdot \overline{\sigma v} \cdot \varepsilon$$

Celá tato energie se ovšem „nepředá“ do plazmatu jako energie **tepelná** (částice, které ji nesou. se nesrazí s ostatními částicemi plazmatu, ale uniknou pryč).
Můžeme tedy definovat **účinnosti** η převedení uvolněné energie na teplo (na kinetickou energii částic plazmatu) - a pak bude první člen podmínky udržení plazmatu :

$$\boxed{E^{tep.}_{př.} = \eta \cdot A \cdot n^2 \cdot \overline{\sigma v} \cdot \varepsilon}$$

tepelná energie předaná plazmatu (v 1 objemu za 1 času)

Další potřebný člen do podmínky udržení plazmatu - tepelnou energii plazmatu ztracenou rozpadem plazmatu v 1 objemu za 1 času - vypočítáme opět velmi jednoduše :
Nejprve stanovíme **celkovou vnitřní (tepelnou) energii plazmatu** v jednotce objemu jako součet celkových kinetických energií obou součástí vysokoteplotního plazmatu, tj. **jader vodíku** (jeho izotopů) a **elektronů** (za předpokladu termodynamické rovnováhy) :

$$U = n_j \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T_j + n_e \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T_e$$

Pro koncentraci jader a elektronů a pro jejich teploty ve vysokoteplotním plazmatu vodíku platí

$$n_j = n_e = n$$
$$T_j = T_e = T$$

Vnitřní energie tedy bude mít tvar :

$$U = n \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T + n \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T = 3 \cdot n \cdot k \cdot T$$

Během **doby udržení plazmatu** τ se tato energie spolu s částicemi plazmatu rozptýlí do okolí, tedy za každou jednotku času (během této doby) se průměrně „ztratí" v jednotce objemu energie :

$$E_{ztr.}^{rozp.} = \frac{U}{\tau}$$

Po dosazení tedy máme :

$$\boxed{E_{ztr.}^{rozp.} = \frac{3 \cdot n \cdot k \cdot T}{\tau}}$$ ***tepelná energie plazmatu ztracená rozpadem (v 1 objemu za 1 času)***

Pro hodnotu třetího členu - energie ztracené zářením plazmatu - platí podle literatury :

$$\boxed{E_{ztr.}^{zář.} = B \cdot n^2 \cdot T^{\frac{1}{2}}}$$ ***energie plazmatu ztracená zářením plazmatu (v 1 objemu za 1 času)***

Pozn. : Tato energie se výrazně zvyšuje s rostoucím podílem těžkých částic v plazmatu (nečistot).

Po dosazení do podmínky udržení plazmatu potom dostaneme :

$$\eta \cdot A \cdot n^2 \cdot \overline{\sigma v} \cdot \varepsilon \geq \frac{3 \cdot n \cdot k \cdot T}{\tau} + B \cdot n^2 \cdot T^{\frac{1}{2}})$$

Rovnici vykrátím n a vynásobíme τ :

$$\tau \cdot \eta \cdot A \cdot n \cdot \overline{\sigma v} \cdot \varepsilon \geq 3 \cdot k \cdot T + \tau \cdot B \cdot n \cdot T^{\frac{1}{2}}$$

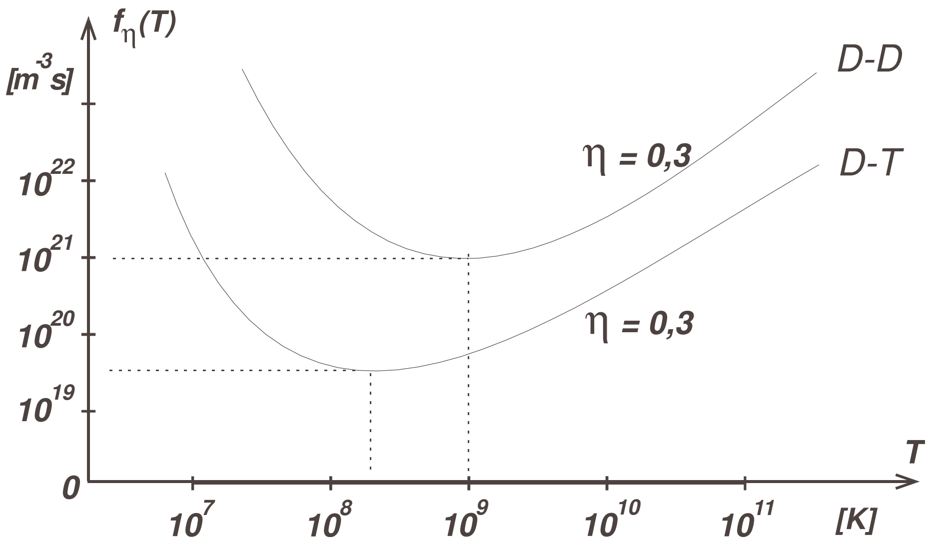
A osamostatníme součin koncentrace plazmatu a doby jeho udržení :

$$\boxed{n \cdot \tau \geq \frac{3 \cdot k \cdot T}{\eta \cdot A \cdot \overline{\sigma v} \cdot \varepsilon - B \cdot T^{\frac{1}{2}}}}$$ ***Lawsonovo kriterium***

Dostali jsme tedy podmínku pro **součin koncentrace plazmatu a doby jeho udržení** $n \cdot \tau$, který je dostatečný pro udržení termonukleární syntézy příslušných jader (D-T, nebo D-D) při určité teplotě T. Výraz na pravé straně je funkcí teploty a účinnosti η (parametr) :

$$f_\eta(T) \quad = \quad \frac{3 \cdot k \cdot T}{\eta \cdot A \cdot \overline{\sigma\, v} \cdot \varepsilon - B \cdot T^{\frac{1}{2}}}$$

Pro obě reakce je tato funkce vynesena v následujícím grafu :



Pro nalezení optimálních podmínek je velmi výhodné, že **existuje minimum** pro obě reakce :

Reakce D-T

$$(n \cdot \tau)_{min} \approx 5 \cdot 10^{19} \quad m^{-3} \cdot s$$

$$(T)_{min} \approx 2 \cdot 10^{8} \quad K$$

Reakce D-D

$$(n \cdot \tau)_{min} \approx 1 \cdot 10^{21} \quad m^{-3} \cdot s$$

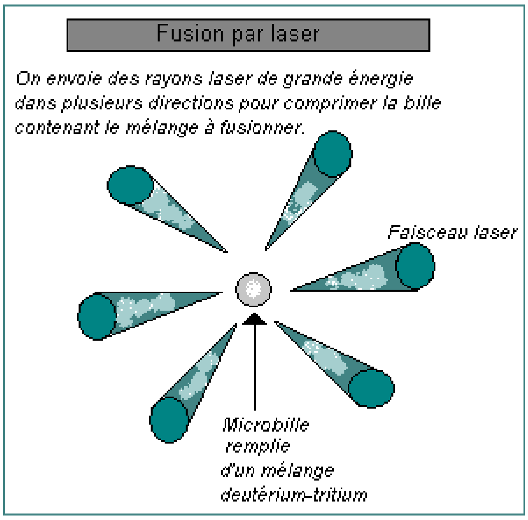
$$(T)_{min} \approx 1 \cdot 10^{9} \quad K$$

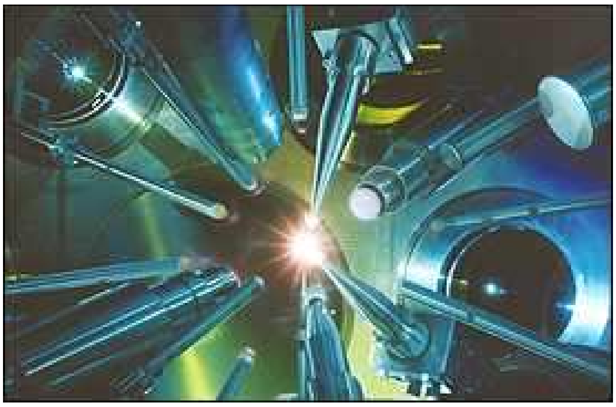
Vidíme, že podmínka pro reakci D-T je podstatně měkčí, nevýhodou u této reakce je nutnost výroby tritia.

Dva přístupy k realizaci řízené termonukleární syntézy

1) Laserová fúze

Několik pulzních laserů o velkém výkonu ozáří malý terčík , který se **vypaří** a vzniklý plyn – plazma (D-D, D-T) je následně **stlačeno** elektromagnetickou energií laserových svazků (viz obr.)



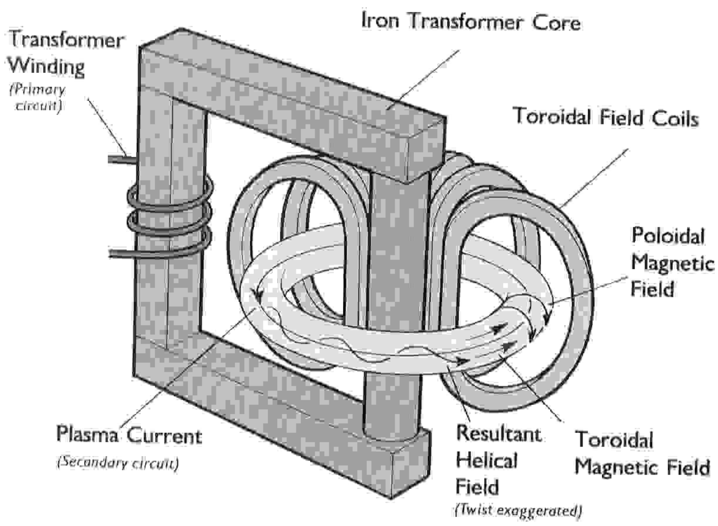


2) Uzavření plazmatu magnetickým polen

TOKAMAK (Toroidalnaja kamera s magnítnymi kaťuškami)

Konstrukce :
Toroidální komora naplněná plynem (deuterium, tritium) jako **sekundár** velkého **transformátoru**. Vybitím mohutné kondenzátorové baterie do **primární cívky** se v sekundáru indukuje silné elektrické pole – dojde k průrazu plynu – teče **velký proud** (10^6 - 10^7 A) , který :

- **Zahřívá** plazma Jouleovým teplem
- **Vytvoří** vlastní magnetické pole, které tzv. **pinch-efektem** (viz níže) stlačuje plazma k podélné ose komory a tím ho **dále zahřívá** a **izoluje** od stěn komory.
- Další p**omocné cívky** vytvářejí **přídavné magnetické pole** ve směru osy pro **zmenšení úniku** částic z plazmatu a zajišťují jeho **stabilizaci** (viz obr.).



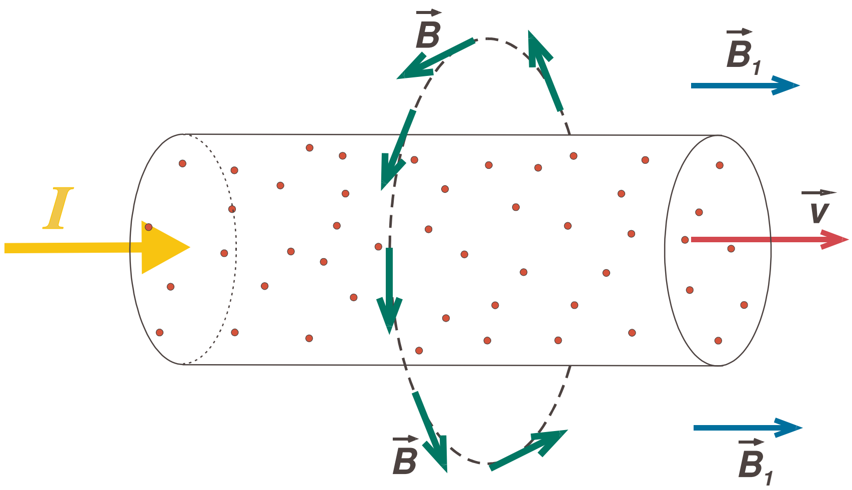
*Působení magnetického pole na plazma (**pinch-efekt**) :*

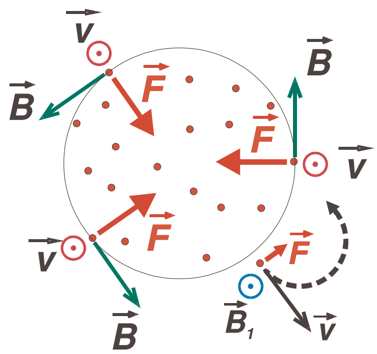
Elektrický proud I v plazmatu je tvořen pohybem nabitých částic ve směru osy komory. Tento proud vytváří osově symetrické magnetické pole $\vec{B}$. Na náboje pohybující se rychlostí $\vec{v}$ proto působí Lorentzova síla:

$$\boxed{\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}}$$

Tato síla směřuje vždy k ose plazmatu (viz obr.) - způsobuje proto jeho „stlačení“ a tím i následný růst tlaku (koncentrace) a teploty (a také vzdalování plazmatu od stěn komory).

Přídavné magnetické pole $\vec{B}_1$ (od pomocných cívek) ve směru osy plazmatu je důležité pro zachycení nabitých částic, které se pohybují směrem od osy a „snaží“ se tedy opustit plazma (jak je možné, že existují takové částice ?).
Vzniklá Lorentzova síla zakřivuje dráhy těchto částic zpět do plazmatu (viz obr. vpravo dole), jejich výsledná dráha je pak spirála – částice proto nemusí dopadnout na stěnu komory – snižuje se proto únik částic z plazmatu, výboj se stabilizuje.





Největší současný tokamak :

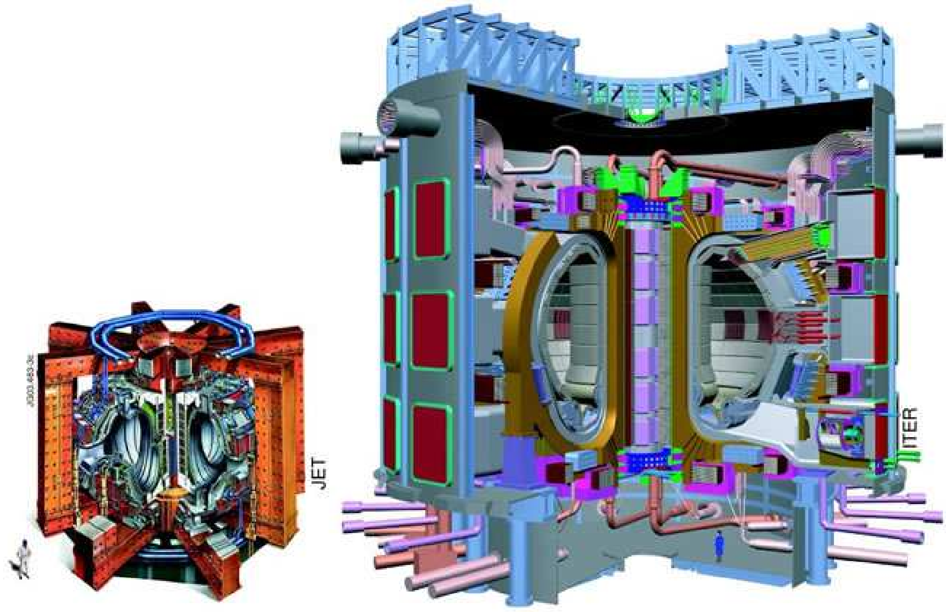
JET – Joint European Torus, zařízení postavené v anglickém Culhamu. Stavba byla započata v roce 1978 a byla dokončena v roce 1983. První řízená termojaderná syntéza ve "větším množství" byla uskutečněna v roce 1991 (1 MW), v roce 1997 byl dokonce dosažen fúzní výkon 16 MW.

Plán :

ITER – International Thermonuclear Experimental Reaktor (Mezinárodní termojaderný pokusný reaktor).
(*iter* také znamená latinsky *cesta*)

Předpokládaný výkon reaktoru je 500 MW, stavba započala v blízkosti francouzského **Cadarache** v roce 2006, dokončena by měla být v roce 2015. . Poté bude reaktor 20 let v testovacím provozu. Reaktor nebude vyrábět elektřinu, pouze 500 MW tepla.

Jedná se v podstatě o TOKAMAK a to úctyhodných rozměrů - prstenec (toroid) má vnější celkový průměr přibližně 20 m, výšku 15 m a objem 837 m^3 . Bude naplněn pouhou polovinou gramu paliva. Tím je směs deuteria a tritia. Okolo aktivní zóny budou uloženy zhruba tři tuny lithia, které bude zachycovat vylétávající neutrony a postupně se přeměňovat na tritium, které se zase využije v reakci.



7) Radioaktivita

Je to proces, při kterém nestabilní atomové jádro nějakého prvku samovolně vysílá do okolí částice (fotony, heliová jádra, elektrony, a jiné).
Při vyzáření fotonu se nezmění ani nukleonové, ani protonové číslo jádra, změní se jen jeho energie, avšak při vyzáření elektronu, nebo heliového jádra dochází ke změně na jádro jiného prvku – tzv. **radioaktivní rozpad**.

Lze rozlišit dva případy :

- ***Přirozená radioaktivita***

Tento pojem používáme, jestliže vyzařují jádra prvků, které se vyskytují v přírodě. Objevil ji roku 1896 Becquerel na uranu a postupně se zjistilo, že se samovolně rozpadají všechny prvky s nukleonovým číslem větším než 82 (82 = olovo, poslední stabilní prvek).
Byly zjištěny 3 druhy záření :
α = jádra helia **β = elektrony** **γ = fotony (elmg. záření)**
Existují čtyři tzv. **rozpadové řady**.
Určitý radioaktivní prvek nebývá zdrojem všech druhů záření – buď je α – zářič, nebo β – zářič s doprovodným γ-zářením.

- ***Umělá radioaktivita***

Tento pojem používáme, jestliže vyzařují jádra uměle připravených prvků.
Objevili manželé Joliotovi roku 1934 – hliník bombardovaný α – částicemi vydával stále záření, i když byl zdroj α – částic odstraněný - vyzařoval vzniklý radioaktivní izotop fosforu :

$$^{27}_{13}Al \quad + \quad ^{4}_{2}\alpha \quad \rightarrow \quad ^{30}_{15}P^{*} \quad + \quad ^{1}_{0}n$$

Pomocí právě přirozených zdrojů (zářičů) α – částic lze provádět **řiditelnou přeměnu jader** (transmutaci), první pozoroval Rutherford 1919 :

$$^{14}_{7}N \quad + \quad ^{4}_{2}\alpha \quad \rightarrow \quad ^{16}_{8}O \quad + \quad ^{1}_{1}p$$

Začalo tak období umělé přeměny prvků, kromě α – částic se začaly používat jádra vodíku a dalších lehčích prvků, často urychlené v urychlovačích. Dnes je možno připravit v laboratořích prakticky jakýkoliv izotop, jakéhokoliv prvku.

V principu ovšem není mezi přirozenou a umělou radioaktivitou žádný rozdíl – obě podléhají stejným zákonitostem :

Protože nejsme schopni popsat radioaktivní rozpad do té míry, abychom určili, zda se dané jádro v dané chvíli rozpadne, musíme proces rozpadu jader sledovat jako náhodný jev pouze statisticky – tj. jádra budou statistickým souborem a my se nebudeme zajímat o to, která konkrétní jádra se rozpadnou, ale jen kolik se jich rozpadne.

Nechť bylo připraveno – tj. máme na počátku (v počátečním čase $t_o = 0$) celkový počet N_o jader nějakého radioaktivního izotopu. S postupem času se tato jádra rozpadají (přitom vzniká nějaké záření) a tím se přeměňují na jádra jiných prvků – původní počet jader se neustále zmenšuje.
Počet jader je tedy klesající funkcí času :

$$N = N(t)$$

Jestliže tedy v daném časovém okamžiku máme N částic, pokusme se uvážit, kolik se jich rozpadne v následujícím krátkém časovém intervalu dt : tento počet bude jistě tím větší (tj. přímá úměra) , čím delší bude tento čas a čím více bude jader :

$$\lambda \cdot N \cdot dt$$

Kladná konstanta úměrnosti je označena jako λ a nazývá se ***rozpadová konstanta*** .

Počet jader rozpadlých za čas *dt* je ovšem současně roven **úbytku** původního celkového počtu jader – tedy poklesu hodnoty funkce N(t) , matematicky její **změně**, tj. **diferenciálu funkce** (protože je tato změna **záporná**, přidáme znaménko mínus) :

$$\boxed{dN = -\lambda \cdot N \cdot dt}$$

Tento vztah nyní použijeme třikrát :

1) Pro definici fyzikální veličiny ***(radio)aktivita*** zkoumaného ***vzorku*** (zářiče, souboru jader), která je dána **počtem proběhlých rozpadů jader v tomto vzorku za 1 času** - ten je právě roven úbytku celkového počtu jader za 1 času :

$$\boxed{R = \left| \frac{dN}{dt} \right| = -\frac{dN}{dt}}$$

aktivita vzorku

Jednotkou je 1 Bq (becquerel), definovaný jako 1 rozpad (nějakého jádra v daném vzorku) za 1 času. Po dosazení dostaneme :

$$R = -\frac{dN}{dt} = -\frac{-\lambda \cdot N \cdot dt}{dt} = \lambda \cdot N$$

2) Pro vysvětlení smyslu rozpadové konstanty. Podle předchozí rovnice platí :

$$\boxed{\lambda = \frac{R}{N}}$$

rozpadová konstanta

To znamená . že rozpadová konstanta je **poměrem** počtu rozpadlých jader (za 1 času) celkového počtu jader, což je možno slovně popsat jako :

- relativní počet rozpadlých jader, či počet rozpadů připadajících na jedno jádro vzorku (za 1 času), nebo také
- z hlediska statistiky je to ovšem poměr počtu uskutečněných jevů (rozpadů) ku celkovému počtu jevů možných a to je **pravděpodobnost** tohoto jevu, tj. **rozpadu 1 jádra z a 1 času** .

3) A do třetice využijeme znalosti diferenciálu funkce N(t) , jako celkového okamžitého počtu jader v daném vzorku, k nalezení této funkce :

Napíšeme vztah pro tento diferenciál :

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$$

Pouhým vydělením hodnotou N dostaneme diferenciální rovnici v separovaném tvaru, tj. s oddělenými proměnnými na obě strany rovnice :

$$\frac{dN}{N} = -\lambda \cdot dt$$

Takové diferenciální rovnice se řeší integrací levých i pravých stran pomocí určitých integrálů a stanovením mezí integrálů se vlastně ihned určují integrační konstanty :
Čas nechť probíhá od počáteční hodnoty $t_o = 0$ do konečné (libovolné) hodnoty t a tomu odpovídá počáteční hodnota druhé veličeny – počtu jader – N_o a konečný (libovolný) počet jader N :

$$\int_{N_o}^{N} \frac{dN}{N} = - \int_{0}^{t} \lambda \cdot dt$$

Dostaneme :

$$[ln\, N]_{N_o}^{N} = - \lambda \cdot [ln\, N]_{0}^{t}$$

Po dosazení mezí integrálů :

$$ln \frac{N}{N_o} = - \lambda \cdot t$$

A na závěr využijeme vztah logaritmu a integrálu :

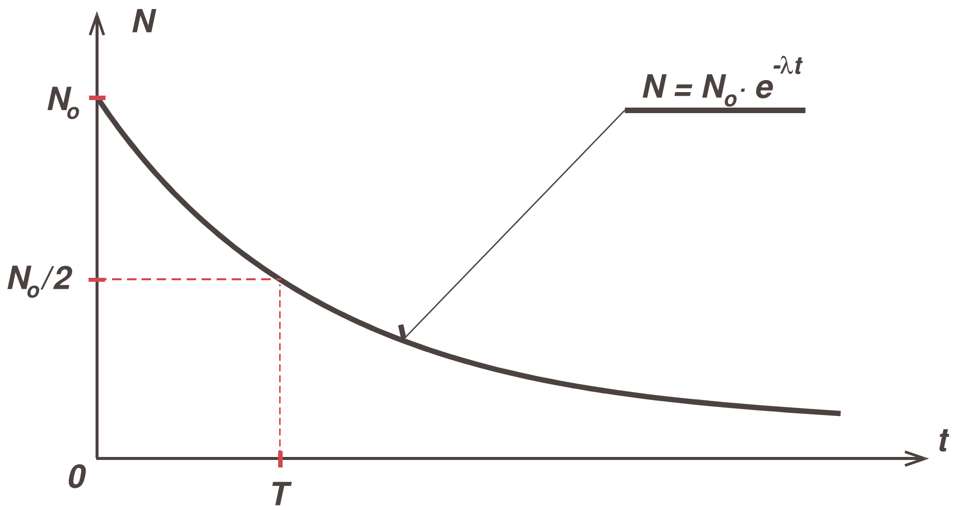
$$\frac{N}{N_o} = e^{-\lambda \cdot t}$$

Po vynásobení jmenovatelem dostaneme hledaný **okamžitý počet jader** ve vzorku jako funkci času , která je základním zákonem radioaktivního rozpadu :

$$\boxed{N = N_o \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$$

rozpadový zákon

Protože rozpadová konstanta jako pravděpodobnost rozpadu jádra je kladná, představuje rozpadový zákon klesající exponencielu, která vychází z počáteční hodnoty N_o počtu jader a v limitě nekonečného času se přibližuje nulové hodnotě (viz obr.) :



Protože počet jader je úměrný aktivitě, je možno psát rozpadový zákon i pro tuto veličinu :

$$R = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N_o \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Součin rozpadové konstanty a počátečního počtu jader má význam počáteční hodnoty aktivity vzorku (zářiče) :

$$\boxed{R_o = \lambda \cdot N_o}$$ ***počáteční aktivita***

Potom můžeme časovou závislost aktivity napsat ve tvaru :

$$\boxed{R = R_o \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$$ ***rozpadový zákon pro aktivitu zářiče***

Na velikosti rozpadové konstanty pak záleží, jak „rychle“ probíhá rozpad jader vzorku, tj. jak vysoká je aktivita vzorku a jak rychle se počet jader vzorku blíží nulové hodnotě.
V praxi se pro zhodnocení aktivity vzorku používá ještě jiná veličina, související s rychlostí poklesu počtu jader – ***poločas rozpadu*** ***T*** **: definuje se jako čas, za který se rozpadne polovina původního počtu jader ve vzorku - tj. čas, za který klesne původní počet jader na polovinu .**

Podle rozpadového zákona tedy bude platit :

$$N(T) = \frac{N_o}{2} = N_o \cdot e^{-\lambda \cdot T}$$

Dostáváme tedy :

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot T}$$

Opět využijeme vztahu exponenciely a logaritmu :

$$\ln \frac{1}{2} = -\lambda \cdot T$$

A po úpravě levé strany :

$$\ln \frac{1}{2} = -\ln 2 = -\lambda \cdot T$$

Pak můžeme stanovit vztah poločasu rozpadu a rozpadové konstanty :

$$\boxed{T = \frac{\ln 2}{\lambda} \cong \frac{0{,}693}{\lambda}}$$ ***poločas rozpadu a rozpadová konstanta***

U známých radioaktivních látek je poločas rozpadu ve velmi širokém intervalu :

$$\boxed{T \in (\, 3 \cdot 10^{-7}\ sec. - 5 \cdot 10^{15}\ roků \,)}$$

Jako aplikaci vyřešme dva příklady :

1) **Určete poločas rozpadu daného zářiče, jestliže po 100 dnech klesne jeho aktivita 1,07 krát** .
Víme, že pro aktivitu platí :

$$R = R_o \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Tedy poměr aktivit je :

$$\frac{R}{R_o} = e^{-\lambda \cdot t}$$

Z toho plyne :

$$ln \frac{R}{R_o} = - \; ln \frac{R_o}{R} = - \; \lambda \cdot t$$

Vypočítáme rozpadovou konstantu :

$$\lambda = \frac{1}{t} \cdot ln \frac{R_o}{R}$$

A poločas rozpadu :

$$T = \frac{ln\, 2}{\lambda} = t \cdot \frac{ln\, 2}{ln \frac{R_o}{R}}$$

Po číselném dosazení :

$$T = 100 \cdot \frac{0{,}693}{ln\, 1{,}07} = 1024{,}5 \;\; [\, dne \,]$$

2) **Jaká je aktivita vzorku $^{238}_{92}U$ hmotnosti $m = 1g$, jehož poločas rozpadu je $4{,}5 \,.\, 10^9$ let.**
Použijeme vztah pro aktivitu :

$$R = \lambda \cdot N$$

Do kterého dosadíme za rozpadovou konstantu :

$$\lambda = \frac{ln\, 2}{T}$$

A počet jader ve vzorku, který je roven počtu atomů, vypočítáme pomocí molární hmotnosti uranu (hmotnost 1 molu) $M_{mol} = 238 \, g$ a Avogadrova čísla $N_A = 6{,}023 \,.\, 10^{23} \; mol^{-1}$ (atomů v 1 molu) :

$$N = \frac{m}{M_{mol}} \cdot N_A$$

Tedy celkem :

$$R = \lambda \cdot N = \frac{ln\, 2}{T} \cdot \frac{m}{M_{mol}} \cdot N_A$$

Číselně :

$$R = \frac{0{,}693}{4{,}5 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} \cdot \frac{1}{238} \cdot 6{,}023 \cdot 10^{23} = \cdots$$
