

# BUZENÝ TLUMENÝ HARMONICKÝ OSCILÁTOR

## Obecná část

Mechanický oscilátor, tak jak bývá prezentován na přednáškách, je tvořen pružinou, tlumičem a tělesem, jež vykonává přímočarý kmitavý pohyb. Vnější buzení zajišťuje obyčejný klikový mechanismus poháněný motorem. Oscilátor můžeme ale také sestavit z tělesa, které koná rotační kmitavý pohyb, a ze zkrutné pružiny. Takový systém se také někdy nazývá torzní kyvadlo. V naší laboratorní úloze je „zkrutná pružina“ realizována dvěma vinutými pružinami, které jsou navázány na rotující těleso pomocí lanka a kladky (viz obr. 1). Těleso (hliníkový disk) vykonává rotační kmitavý pohyb kolem nějaké rovnovážné polohy a my můžeme měřit jeho úhel otočení  $\theta$ . Kladka pochopitelně nesmí prokluzovat. Tlumení je realizováno magnetem, jehož magnetické pole indukuje v pohybujícím se disku vířivé proudy, ty dají vzniknout dalšímu magnetickému poli, které silově interaguje s polem magnetu. Důležité je, že vzniklý brzdný moment síly je úměrný úhlové rychlosti tělesa. Diferenciální rovnice popisující takový systém (bez vnějšího buzení) pak vypadá takto:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + \kappa\theta = 0, \quad (1)$$

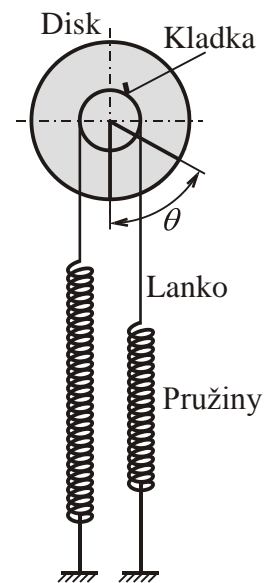
kde  $t$  je čas,  $\theta$  úhel otočení disku vzhledem k rovnovážné poloze,  $I$  moment setrvačnosti disku,  $b$  konstanta tlumení a  $\kappa$  je torzní konstanta pružiny. Součin  $\kappa\theta$  udává moment, kterým se pružiny snaží vrátit disk do rovnovážné polohy, pokud jej vychýlíme o úhel  $\theta$ . Výraz  $b \frac{d\theta}{dt}$  představuje brzdný moment tlumiče, jeho velikost je přímo úměrná okamžité úhlové rychlosti. Nakonec výraz

$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = I\varepsilon$  je moment síly, kterým musíme působit na disk, abychom mu udělili úhlové zrychlení  $\varepsilon$ . Disk (válec) s poloměrem  $R$  a hmotností  $m$ , rotující kolem své osy, má moment setrvačnosti:

$$I = \frac{1}{2} mR^2. \quad (2)$$

Rešením rovnice (1) je funkce popisující úhlovou výchylku disku poté, co jej vychýlíme z klidové polohy a uvolníme:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\left(\frac{b}{2I}\right)t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (3)$$



Obr. 1

Jedná se tedy o tlumené harmonické kmity, jejichž amplituda exponenciálně klesá. Pro úhlovou frekvenci kmitů platí:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I} - \frac{b^2}{4I^2}} \quad (4)$$

Pokud budeme na oscilátor působit vnějším momentem síly o harmonickém průběhu s frekvencí  $\omega_{\text{ext}}$ , v diferenciální rovnici přibude další člen:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + \kappa\theta = M_0 \sin(\omega_{\text{ext}} t), \quad (5)$$

kde  $M_0$  je amplituda vnějšího („budicího“) momentu síly. Ustálené řešení této rovnice už je složitější:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_{\text{ext}} t + \varphi), \quad (6)$$

kde amplituda výchylky  $\theta_0$  již není konstanta, ale funkce budicí úhlové frekvence  $\omega_{\text{ext}}$ :

$$\theta_0 = \frac{M_0}{\sqrt{I^2(\omega_{\text{ext}}^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega_{\text{ext}}^2}}, \quad (7)$$

kde  $\omega_0$  je úhlová frekvence, kterou by kmital nebudzený a netlumený (tj.  $b = 0$ ) oscilátor:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}. \quad (8)$$

Maximální hodnoty dosahuje amplituda výchylky  $\theta_0$  pro budicí frekvenci:

$$\omega_{\text{rez}} = \sqrt{\frac{\kappa}{I} - \frac{b^2}{2I^2}}. \quad (9)$$

V tomto okamžiku říkáme, že systém je „v rezonanci“, a tuto frekvenci nazýváme „rezonanční“. Vidíme, že rezonanční frekvence pro amplitudu **výchylky** závisí na velikosti tlumení  $b$ . Fázový rozdíl  $\varphi$  mezi budícím momentem a výchylkou disku je dán vztahem:

$$\text{tg}\varphi = \frac{\omega_{\text{ext}} b/I}{\omega_{\text{ext}}^2 - \omega_0^2}. \quad (10)$$

Pokud bychom se zajímali o úhlovou rychlost disku (je dána derivací výchylky (6) podle času), zjistili bychom zajímavou skutečnost: amplituda **úhlové rychlosti** dosahuje maxima při jediné frekvenci  $\omega_{\text{ext}} = \omega_0$ , bez ohledu na výši tlumení.

### **Měření**

Měření budeme provádět na zařízení na obr. 2. Hliníkový disk (nahore) je otočně uložen a jeho úhlová výchylka je snímána optickým snímačem (modrá krabička). Zároveň je na hřídeli kladka, která pomocí lanka (1,5 závitů) spojuje disk s pružinami. Levá pružina je opět lankem přes kladku druhého snímače spojena s klikou budicího elektromotoru. Rychlost otáčení kliky je úměrná napájecímu napětí elektromotoru. Snímače a motor jsou připojeny přes interface k počítači.

Rozhraní se zapíná stisknutím a podržením tlačítka vlevo nahoře. Popis ovládacího programu je přiložen u úlohy.

### **A. Měření úhlové frekvence nebuzeného oscilátoru**

Tlumicí magnet oddalte co nejvíce od disku (je připevněn na šroubu). Budete zaznamenávat úhlovou výchylku disku v závislosti na čase. Pro ten účel nahrajte do měřicího programu soubor s nastavením *MereniA.cap*. Klikněte *Record*, pootočte disk asi o  $\frac{1}{2}$  otáčky a uvolněte. Nechte proběhnout asi 15 kmitů a měření zastavte. Změřte dobu deseti celých kmitů pomocí nástroje *Coordinates*. Z hodnoty pak určete (doma) úhlovou frekvenci.

### **B. Určení torzní konstanty pružiny**

Nahrajte soubor s nastavením *MereniB.cap*. Uvidíte displej zobrazující úhlovou výchylku disku. Zapněte měření. Zavěste na horní konec jedné z pružin 20g závaží. Zaznamenejte úhel, o který se disk pootočí. Pak vypněte měření a odstraňte závaží.

### **C. Určení momentu setrvačnosti disku**

Opište si z disku jeho hmotnost a změřte průměr pomocí posuvného měřítka (vydá vyučující). Nezapomeňte stanovit chybu měření.

### **D. Automatické měření rezonančních křivek**

Nahrajte soubor s nastavením *MereniD.cap*. Program v tomto nastavení kreslí graf závislosti amplitudy výchylky disku na úhlové frekvenci budicího mechanismu. Po spuštění (*Record*) se frekvence zvyšuje od minimální do maximální hodnoty a pak se měření samo zastaví. Sběr dat trvá 500 sekund. Změřte postupně rezonanční křivky pro tři hodnoty tlumení – vzdálenosti magnetu od disku: 7, 5 a 3 mm. Poslední hodnotu 3 mm ponechte nastavenou pro úkol F. Pak kvalitativně zhodnoťte tvar křivek. Jak ovlivňuje vzrůstající tlumení tvar křivek (šířku, maximální amplitudu, rezonanční frekvenci)? Nakonec analyticky vyhodnoťte rezonanční křivku pro tlumení 3 mm tak, že proložíte naměřená data (*User Defined Fit*) očekávanou funkcí (7). Před spuštěním fitování je třeba alespoň přibližně odhadnout a vložit počáteční hodnoty fitovaných parametrů. Opište si naitované parametry a použijte je pro stanovení rezonanční frekvence  $\omega_0$  a koeficientu tlumení  $b$ . Naměřená data ponechte v programu pro úkol E.



Obr. 2

### E. Pozorování fázového rozdílu mezi buzením a úhlovou výchylkou disku

Použijte naměřená data z předchozího úkolu. Pro 3mm tlumení (*Run#3*) nechte zobrazit do grafu časový průběh úhlové výchylky snímače buzení (*Angle, Ch P2*) a snímače disku (*Angle, Ch P1*). Pomocí nástroje *Coordinates* změřte fázový posuv  $\varphi$  mezi výchylkou snímače buzení (úměrná budicímu momentu) a výchylkou disku pro jednu zvolenou frekvenci. Změřte také periodu buzení.

### F. Přímé měření koeficientu tlumení

Pro tlumení 3 mm zaznamenejte výchylku disku v závislosti na čase. Za tím účelem nahrajte soubor s nastavením *MereniF.cap*. Pak vynulujte senzor. Vychylyte disk asi o jednu otáčku (6,28 rad) doprava (ve směru hodinových ručiček) a držte jej. Zapněte měření (*Record*) a disk uvolněte. Až se kmitání disku zcela zastaví, záznam zastavte. Proveďte fitování harmonickým tlumeným průběhem (*Damped sine fit*). Nafitované parametry si opište.

### Pracovní úkoly – analýza naměřených dat

- A) Z naměřené doby 10 kmitů určete úhlovou frekvenci.
- B) Vypočtete moment síly, kterým působilo závaží na disk, víte-li, že poloměr kladky disku je 24 mm. Vypočtete torzní konstantu pružiny podle definičního vztahu:  $\kappa = M/\theta$ . Používejte zásadně základní jednotky (radiány, Nm).
- C) Vypočtete moment setrvačnosti disku  $I$  podle vztahu (2). Stanovte jeho chybu pomocí věty o přenosu chyby na str. 17 skript.
- D) Uveďte zhodnocení tvaru rezonančních křivek. Z parametrů fitování třetí křivky (tlumení 3 mm) stanovte frekvenci  $\omega_0$  a koeficient tlumení  $b$  (zde použijte moment setrvačnosti z úkolu C). Získanou frekvenci  $\omega_0$  porovnejte s hodnotou vypočtenou ze vztahu (8), do kterého dosadíte výsledky z úkolů B a C.
- E) Změřený fázový posuv porovnejte s teorií (vztah 10). Do vztahu použijte hodnoty  $b$  a  $I$  získané v úkolech D a C.
- F) Z nafitovaných parametrů sestavte vztah (3). Na základě znalosti momentu setrvačnosti  $I$  z úkolu C vypočtete koeficient tlumení  $b$  a porovnejte s hodnotou získanou v úkolu D. Změřenou (fitovanou) úhlovou frekvenci tlumených kmitů porovnejte s teoretickou hodnotou vypočtenou ze vztahu (4), do něhož dosadíte hodnoty z úkolů B, C, F.