

ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ ROTAČNÍ POHYB

Obecná část

Pomocí Newtonova pohybového zákona síly můžeme odvodit pohybovou rovnici pro rotační pohyb:

$$M = I \frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon , \quad (1)$$

kde M je moment vnější síly působící na těleso, ω úhlová rychlost, ε úhlové zrychlení a veličina I je tzv. moment setrvačnosti tělesa vzhledem k dané ose otáčení. Vyjadřuje míru setrvačnosti rotujícího tělesa, podobně jako hmotnost vyjadřuje míru setrvačnosti tělesa při posuvném pohybu. Pro tuhé těleso (tvořené soustavou hmotných bodů s neproměnnými vzdálenostmi) je dán vztahem:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 , \quad (2)$$

kde m_i je hmotnost i -tého hmotného bodu a r_i je kolmá vzdálenost tohoto bodu od osy otáčení. Moment setrvačnosti tedy závisí jak na hmotnosti tělesa, tak na rozložení této hmoty kolem osy otáčení.

Je-li působící moment síly konstantní, těleso vykonává pohyb s konstantním úhlovým zrychlením, který nazýváme „rovnoměrně zrychlený“. Tento případ budeme zkoumat pomocí rotačního systému se vzduchovým ložiskem, které má nepatrné tření. Pohyb začíná z nulové počáteční úhlové rychlosti $\omega = 0$ v čase $t = 0$. Z řešení pohybové rovnice (1) plyne, že úhel o který se těleso pootočí, bude v čase t :

$$\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 . \quad (3)$$

Konstantní moment síly vytváří lanko na řemenici o poloměru r_M . Lanko je vedeno přes kladku a napínáno zavěšeným tělesem o hmotnosti m_M . Moment síly je proto:

$$M = r_M m_M g , \quad (4)$$

kde g je gravitační zrychlení. K dispozici jsou tělesa ve tvaru S-háčeků o hmotnostech 1 g (dva kusy) a 2 g (jeden kus).

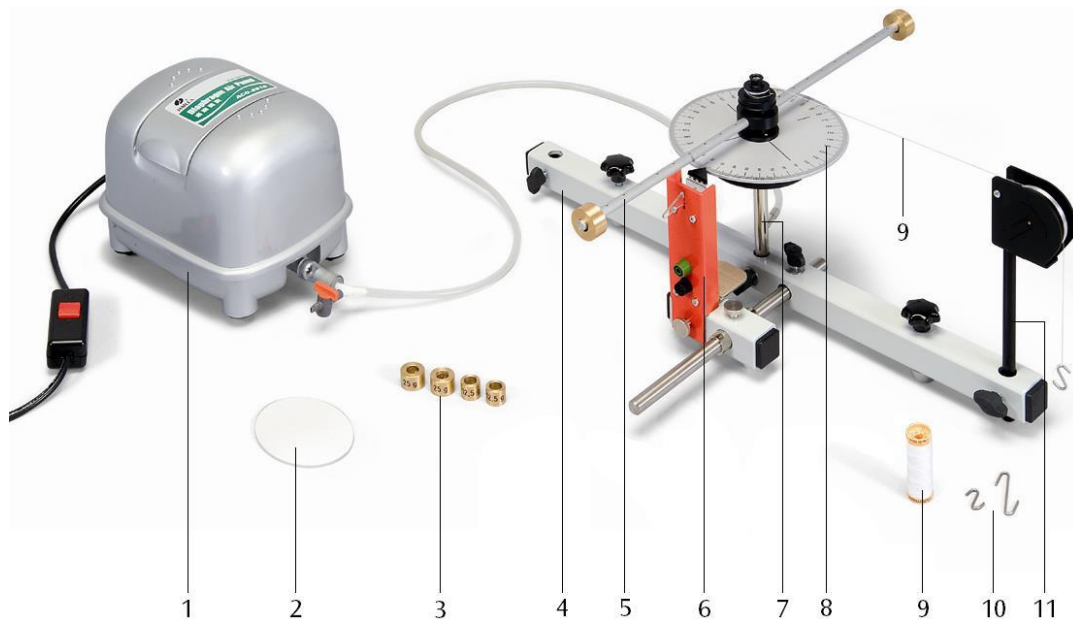
Moment setrvačnosti I rotujícího tělesa lze měnit připevněním dvou závaží s hmotností m_1 na dvě ramena v určité vzdálenosti r_1 od osy rotace. Pak bude podle Steinerovy věty:

$$I = I_0 + 2m_1 r_1^2 + 2I_Z , \quad (5)$$

kde I_0 je moment setrvačnosti tělesa bez přídavných závaží. Vlastní moment setrvačnosti I_Z přídavného závaží přitom můžeme zanedbat – je malý ve srovnání s I_0 . Naše sada obsahuje závaží s hmotnostmi 12,5 g, 25 g a 50 g.

Měření ¹⁾

Zařízení (viz obr. 1) je opatřeno brzdou s mikropsínačem, aby bylo možno přesně definovat počáteční polohu (úhel) a čas odbrždění (t_0). Na rotujícím tělese je úhломěrná stupnice, která má v místě nuly vyvrtaný otvor. Pro detekci průchodu



Obr. 1 Zařízení pro měření rotačního pohybu

- 1 – kompresor, 2 – vyvažovací disk, 3 – přídavná závaží, 4 – základna, 5 – ramena, 6 – startovací jednotka, 7 – vzduchové ložisko, 8 – rotující těleso, 9 – lanko, 10 – urychlovací tělesa, 11 – kladka

nulovou polohou je využit laserový odrazový senzor (obr. 2). Jeho výstup je ve stavu přibližně 0,09 V, pokud se paprsek odráží od kotouče, a ve stavu 2,50 V, když prochází otvorem. Senzor je ke startovací jednotce připevněn pomocí magnetu, takže se může při neopatrné manipulaci posunout. Proto je třeba na počátku měření zkontrolovat, zda v nulové poloze (hrot brzdy přesně proti nulové rýsce stupnice) skutečně paprsek prochází otvorem bez odrazu. Zdrojem vzduchu pro ložisko je malý kompresor. Zapínejte jej pouze při vlastním měření. Vyvážení celé aparatury provádí vyučující po případné změně umístění úlohy pomocí vyvažovacího disku, který se namísto rotujícího tělesa vloží na ložisko.



Obr. 2

Signály ze spínače brzdy a laserového senzoru jsou zaznamenávány dataloggerem 3B NETlogTM

(obr. 3). Vzorkovací frekvence musí být nastavena na 1 kHz, aby bylo možno měřit s přesností na milisekundy. Záznamovaná data se z dataloggeru se stahují do počítače pomocí programu 3B NETdata a pak se uloží do textových souborů. Analýzou souborů zjistíte dobu otáčení tělesa od uvolnění brzdy do průchodu nulou stupnice. Do paměti dataloggeru se sice vejde více jednotlivých měření, ale pokud se paměť zaplní (na displeji se objeví „STORE (100%)“), poslední záznam je neúplný. Proto je nejlepší po každém jednotlivém měření data ihned zpracovat a vymazat paměť dataloggeru.



Obr. 3

A. Zkoumání závislosti úhlu otočení na čase

Namotejte několik závitů lanka na prostřední řemenici ($r_M = 10$ mm), ved'te přes kladku a na konec zavěste S-háčky o celkové hmotnosti 3 g. Z ramen tělesa sejměte přídatná závaží (pokud jsou). Natočte těleso na požadovaný počáteční úhel a zabrzděte brzdou. Pak proveďte úkony v tomto pořadí: zapněte kompresor, spusťte záznam dataloggeru, odbrzděte těleso. Jakmile těleso projde nulovou polohou (laserový paprsek problikne otvorem), zastavte záznam, vypněte kompresor. Stáhněte záznam do počítače, uložte pod vhodným jménem a vymažte paměť dataloggeru.

Pracovní úkol

- 1) Proveďte měření doby otočení pro úhly 10, 40, 90, 160 a 250° pro urychlovací závaží 3 g. Data uveďte do vhodné tabulky.
- 2) Sestrojte (doma) graficky závislost úhlu otočení φ na druhé mocnině času t .²⁾
- 3) Tato funkce by měla být podle vztahu (3) přímka **procházející počátkem**³⁾. Pomocí lineární regrese zjistěte její směrnici a z ní úhlové zrychlení ε .
- 4) Dále spočítejte urychlovací moment síly a ze vztahu (1) moment setrvačnosti I_0 našeho rotujícího tělesa²⁾.
- 5) Stanovte chybu urychlovacího momentu síly⁴⁾. Chybu poloměru kladky vemte 0,2 mm a chybu závaží 0,1 g.

B. Měření úhlového zrychlení jako funkce přiloženého momentu síly

Budeme měřit úhlové zrychlení ε jako funkci působícího momentu síly. Měření bude probíhat podobně jako v předchozím úkolu s tím, že počáteční úhel bude stále 90°. Měnit se bude velikost urychlujících závaží a poloměr řemenic. Při změně poloměru řemenice je třeba nejprve lanko trochu odmotat, pak přejít šikmo na sousední řemenici a namotat několik závitů přes tento šikmý přechod, aby se zafixoval a neklouzal.

Tab. 1: Úhlové zrychlení ε jako funkce přiloženého momentu síly M .

m_M [g]	r_M [mm]	M [mN·mm]	t [sec]	ε [rad/s ²]

Pracovní úkol

- 1) Proveďte měření doby otočení pro úhel 90°. Hmotnost urychlovacího závaží volte 1, 2, 3, 4 g pro poloměr řemenice 10 mm a 3 g pro poloměry řemenic 5 a 15 mm. Data uveďte do tabulky 1 (a seřaďte podle velikosti momentu síly).
- 2) Na základě vztahu (3) vypočítejte (doma) ze změřených časů jednotlivá úhlová zrychlení²⁾.
- 3) Sestrojte graf závislosti úhlového zrychlení ε na přiloženém momentu síly. Závislost by měla být přímka **procházející počátkem**³⁾ - viz vztah (1). Směrnice této přímky je rovna $1/I_0$, kde I_0 je moment setrvačnosti našeho

rotujícího tělesa bez přídavných závaží. Pomocí lineární regrese určete tuto směrnici z ní moment setrvačnosti I_0 .

- 4) Stanovte chybu úhlového zrychlení ε pro jeden vybraný řádek tabulky⁴⁾. Chybu úhломěrné stupnice určíte standardním postupem, chyba časování záznamu dataloggeru je dána přesností a stabilitou krystalového oscilátoru procesoru. U běžných oscilátorů bývá řádu 10^{-3} . Výrobce ji neuvádí, takže berte relativní chybu v určení času 0,001.

C. Měření úhlového zrychlení jako funkce momentu setrvačnosti

Konstantní moment síly budeme vytvářet závažími o celkové hmotnosti 3 g na prostřední řemenici ($r_M = 10$ mm). Měřit se bude opět doba pro úhel otočení 90° stejně jako v úkolu B. Měnit budeme moment setrvačnosti tělesa I tak, že na ramena zavěšíme **symetricky** dvě přídavná závaží a budeme zvětšovat jejich vzdálenost od středu otáčení. Fixační otvory v ramenech mají rozteč 20 mm, první má vzdálenost od osy otáčení 30 mm. Do otvorů musí zapadnout malý kolík uvnitř závaží.

Tab. 2: Úhlové zrychlení ε jako funkce momentu setrvačnosti I pro parametry:
 $m_M = 3$ g, $r_M = 10$ mm, $m_I = \dots\dots\dots$ g

r_I [mm]	I [g.m ²]	t [sec]	ε [rad/s ²]	$\varepsilon_{\text{teor}}$ [rad/s ²]

Pracovní úkol

- 1) Proved'te měření doby otočení pro úhel 90° pro všechny vzdálenosti přídavných závaží (dáno počtem fixačních otvorů) a též bez přídavných závaží (pokud již tuto hodnotu nemáte změřenu v úkolu **B**). Hmotnost závaží m_I určí vyučující. Data uveďte do tabulky 2.
- 2) Ze změřených časů vypočtete (doma) jednotlivá úhlová zrychlení (vztah (3))²⁾.
- 3) Ze vztahu (5) vypočtete momenty setrvačnosti rotujícího tělesa pro všechny polohy přídavných závaží. Jako I_0 použijte hodnotu z úkolu **A** nebo **B**.
- 4) Vypočtete teoretické hodnoty úhlových zrychlení $\varepsilon_{\text{teor}}$ ze vztahu (1).
- 5) Sestrojte graf závislosti změřeného úhlového zrychlení ε na momentu setrvačnosti I . Závislost by měla být hyperbolická. Do stejného grafu vynesete i teoretickou závislost z předchozího úkolu 4).

Poznámky:

- 1) Vyučující vybere úkoly k měření. Jsou možné kombinace **A+C** nebo **B+C**.
- 2) Do grafů a při výpočtech používejte základní jednotky: rad, s, Nm, rad/s², atd.
- 3) Přímka procházející počátkem je prostá přímá úměra $y = kx$. Pro lineární regresi se v tomto případě používá vzorec na str. 19 skript nahoře. V Excelu je nutno zaškrtnout volbu "Hodnota Y=0".
- 4) Jedná se o nepřímo měřenou veličinu, takže je potřeba použít větu o přenosu chyby na str. 17 skript.