Chyby měření

Provedeme-li určité měření za stejných podmínek vícekrát, jednotlivá měření se mohou odlišovat (z důvodu konečné rozlišovací schopnosti měř. přístrojů, náhodných vlivů apod.).

Chyba měření: $e = x - x'$ — x.....přesná hodnota měřené veličiny, x'...naměřená hodnota

Problémem ovšem je, že neznáme skutečnou hodnotu x měřené veličiny a nemůžeme tedy takto chybu vypočítat!
Pozor!!! Tabulková hodnota není skutečnou hodnotou!

Úkolem teorie chyb je tedy na základě souboru měření najít „nejlepší" odhad skutečné hodnoty x měřené veličiny a odhad tzv. **absolutní směrodatné** (standardní) chyby δx. Tato chyba charakterizuje velikost intervalu, v němž můžeme očekávat, že bude skutečná hodnota ležet. **Absolutní** chyba má rozměr měřené veličiny !!

Kvalitu měření obvykle nehodnotíme pomocí **absolutní** chyby, ale pomocí chyby **relativní**, definované podílem absolutní chyby a odhadované hodnoty.

Relativní chyba $\xi x = \frac{\delta x}{x}$ je bezrozměrná, obvykle se udává v procentech.

Výpočet chyby u přímého měření

a) Měříme-li fyzikální veličinu **vícekrát**

Provedeme n měření veličiny x. Naměříme hodnoty $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

Nejpravděpodobnější hodnotou měřené veličiny x (tj. hodnotou, která se skutečné hodnotě x nejvíce blíží) je aritmetický průměr:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}.$$

Jako směrodatnou (standardní) absolutní chybu provedených měření definujeme odmocninu z rozptylu :

$$\delta\overline{x} = \overline{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}{n \cdot (n-1)}},$$ kde $\Delta x_1 = \overline{x} - x_1, .., \Delta x_n = \overline{x} - x_n$ jsou zdánlivé odchylky

(t.j. odchylky naměřených hodnot od aritmetického průměru)
Výsledek se napíše ve tvaru:

$$x = \overline{x} \pm \delta\overline{x} \quad [jednotky]$$

Příklad:

Bylo provedeno deset měření určité délky l . Naměřené hodnoty jsou uvedené v následující tabulce.

i	l_i [cm]	Δl_i [cm]	$\Delta^2 l_i$ [cm]
1	62,70	$+ 43\times10^{-3}$	$18{,}49\times10^{-4}$
2	62,77	$- 27\times10^{-3}$	$7{,}29\times10^{-4}$
3	62,71	$+ 33\times10^{-3}$	$10{,}89\times10^{-4}$
4	62,73	$+ 13\times10^{-3}$	$1{,}69\times10^{-4}$
5	62,76	$- 17\times10^{-3}$	$2{,}89\times10^{-4}$
6	62,72	$+ 23\times10^{-3}$	$5{,}29\times10^{-4}$
7	62,78	$- 37\times10^{-3}$	$13{,}69\times10^{-4}$
8	62,75	$- 7\times10^{-3}$	$0{,}49\times10^{-4}$
9	62,77	$- 27\times10^{-3}$	$7{,}29\times10^{-4}$
10	62,74	$+ 3\times10^{-3}$	$0{,}09\times10^{-4}$
	$\sum_i l_i = 627{,}43$	$\sum_i \Delta l_i = 0$	$\sum_i \Delta^2 l_i = 68{,}1\times10^{-4}$

$$\bar{l} = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n}{n} = \frac{627{,}43\, cm}{10} = 62{,}743\, cm$$

$$\delta l_i = \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_i \Delta^2 l_i}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{68{,}1\times10^{-4}}{90}} \doteq 0{,}01\, cm$$

Naměřená délka je l = (62,74 ± 0,01) cm.

b) Měříme-li fyzikální veličinu **jedenkrát** (přístrojová chyba)

- Chyba čtení stupnice

Za absolutní směrodatnou chybu stupnice budeme považovat **0,3 dílku** (např. u teploměru je to 0,3 dílku na stupnici, u milimetrového měřítka je $\delta x = 0{,}3 mm.$).

- Chyba údaje displeje

Absolutní směrodatná chyba odpovídá opět **0,3 řádu poslední číslice**.

- Chyba elektrických měřících přístrojů

Ručkové měřící přístroje

K určení chyby elektrického měřícího přístroje musíme znát:

- třídu přesnosti měřícího přístroje, která udává kolik % zvoleného rozsahu činí maximální možná chyba
- použitý rozsah měřícího přístroje

Digitální měřící přístroje

U digitálních přístrojů bývá maximální chyba udávána složitěji. Podrobnější popis viz kapitola „Přístroje užívané ve fyzikálním praktiku“.

Jak u ručkových, tak digitálních elektrických měřících přístrojů se předpokládá rovnoměrné rozložení chyb, a proto je absolutní chyba (charakterem odpovídající směrodatné chybě) přibližně rovna 0,6 uváděné maximální chyby.

Příklad:

Pomocí ampérmetru s tř. přesnosti t_p = 1,5 % při zvoleném rozsahu 1A naměříme I = 1A.

Směrodatná absolutní chyba $\delta I = 0{,}6 \cdot t_p \cdot R = 0{,}6 \cdot 1{,}5\ \% \cdot 1A = 0{,}009A$

Relativní chyba $\xi I = \dfrac{\delta I}{I} = \dfrac{0{,}009A}{1A} = 0{,}009$

Naměříme-li na stejném přístroji I = 0,5 A (při použití stejného rozsahu), bude směrodatná absolutní chyba opět $\delta I = 0{,}6 \cdot t_p \cdot R = 0{,}6 \cdot 0{,}015 \cdot 1 = 0{,}009A$.

Ale relativní chyba $\xi I = \dfrac{\delta I}{I} = \dfrac{0{,}009}{0{,}5} = 0{,}018 = 1{,}8\%$. Vidíme tedy, že absolutní chyba je na daném rozsahu stejná, ale relativní chyba se zmenšuje, naměříme-li hodnotu bližší plnému rozsahu přístroje. Je tedy třeba přepínat rozsahy přístroje tak, aby se výchylka přístroje při měření co nejvíce blížila maximální výchylce.

2) Výpočet chyby u nepřímých měření

Je-li měřená veličina funkcí několika přímo měřitelných veličin ***Y = f (a,b,c,…)*** a touto funkcí je **součet nebo rozdíl** přímo měřitelných veličin, pak je absolutní chyba dána vztahem:

$$\delta Y = \delta(a \pm b \pm c \pm ....) = \sqrt{(\delta a)^2 + (\delta b)^2 + (\delta c)^2 + ...}$$

Je-li měřená veličina funkcí několika přímo měřitelných veličin ***Y* = *f* (*a*,*b*,*c*,…)** a touto funkcí je **součin nebo podíl** přímo měřitelných veličin, pak při výpočtu chyby takové veličiny postupujeme takto:

a) Nejprve určíme absolutní chyby všech přímo měřitelných veličin vyskytujících se ve vztahu, tj. **δ*a***, **δ*b***, **δ*c***, …

b) Spočítáme všechny relativní chyby těchto veličin, tj. **ξ*a* = δ*a* / *a*** a obdobně **ξ*b***, **ξ*c***, …

c) Výslednou <u>relativní</u> chybu měření veličiny pak vypočítáme jako odmocninu ze součtu druhých mocnin relativních chyb jednotlivých přímo měřitelných fyzikálních veličin, vyskytujících se ve vztahu, tj.

$$\xi Y = \sqrt{\xi^2 a + \xi^2 b + \xi^2 c + \ldots}$$

Vyskytuje-li se některá z veličin v *n*-té mocnině, bereme relativní chybu této veličiny *n*-krát.

d) Absolutní chybu pak spočteme z definice relativní chyby $\xi Y = \dfrac{\delta Y}{Y}$ $\Rightarrow$

$$\delta Y = \xi Y \cdot Y$$

e) Výsledek zapíšeme ve tvaru ***Y*=** $Y \pm \delta Y$

!!!! Je třeba správně zaokrouhlit chybu i výsledek !!!!

Při zaokrouhlení postupujeme takto:

- Nejprve zaokrouhlíme absolutní chybu na jednu, výjimečně dvě platné číslice (Platnými číslicemi rozumíme všechny číslice 1,2,…,9, včetně nuly. Nulu však počítáme za platnou číslici pouze tehdy, je-li uprostřed nebo na konci čísla.).
- Výsledek pak zaokrouhlíme na tolik platných míst, aby absolutní směrodatná chyba opravovala poslední platnou číslici.

PŘÍKLADY:

správný zápis	nesprávný zápis
21,50 ± 0,02	21,5 ± 0,02
0,6 ± 0,3	0,56 ± 0,3
0,23 ± 0,06	0,2341 ± 0,0567
347 ± 9	347,1 ± 9
$(3{,}1 \pm 0{,}1).10^5$	310000 ± 10000

Příklad:

Hustotu válečku daných rozměrů a známé hmotnosti určíme ze vztahu $\rho = \frac{4M}{\pi d^2 h}$, kde M je hmotnost válečku, h jeho výška a d průměr.

Nejprve spočteme absolutní chyby všech veličin, které se ve vztahu vyskytují δM, δd, δh. Dále spočteme chyby relativní : $\xi M = \frac{\delta M}{M}$, $\xi d = \frac{\delta d}{d}$, $\xi h = \frac{\delta h}{h}$

Výsledná relativní chyba hustoty bude dána vztahem

$\xi\rho = \sqrt{\xi M^2 + (2\xi d)^2 + \xi h^2}$.

Absolutní chybu pak spočteme ze vztahu $\delta\rho = \xi\rho \cdot \rho$. Výsledek pak zapíšeme ve tvaru $\rho = ... \pm \ \delta\rho \ [kg \cdot m^{-3}]$.

!!!! Vše je podrobně ve skriptech str. 12÷24 !!!!