VZOROVÝ PŘÍKLAD VÝPOČTU CHYB MĚŘENÍ

Ukažme na příkladu tepelné vodivosti, jak probíhá výpočet odhadu skutečné hodnoty a její chyby.

Tepelnou vodivost kovu λ můžeme určit na základě vztahu:

$$\lambda = \frac{UIl}{S(t_A - t_B)} \quad ,$$

kde U a I jsou napětí a proud vytápějící topné těleso, l vzdálenost měřicích spojů termočlánku, $t_A - t_B$ je odpovídající rozdíl teplot v místech spojů termočlánku a konečně $S = \pi D^2/4$ je průřez vzorku (D je průměr vzorku).

Dosadíme-li vyjádření pro průřez, dostaneme vztah, v němž vystupují pouze konstanty a přímo měřené veličiny:

$$\lambda = \frac{4UIl}{\pi D^2 (t_A - t_B)} \quad . \tag{1}$$

Výslednou relativní chybu stanovíme pomocí věty o přenosu chyby (kap. „Chyby měření“, odst. C):

$$\xi\lambda = \sqrt{(\xi U)^2 + (\xi I)^2 + (\xi l)^2 + (\xi\pi)^2 + (2\xi D)^2 + [\xi(t_A - t_B)]^2} \tag{2}$$

$$\xi(t_A - t_B) = \frac{\delta(t_A - t_B)}{t_A - t_B} = \frac{\sqrt{\delta t_A^2 + \delta t_B^2}}{t_A - t_B} \tag{3}$$

Výsledná absolutní chyba pak bude rovna $\delta\lambda = \lambda . \xi\lambda$.

Do vztahů dosazujeme **směrodatné chyby** (pravděpodobnost 68,3 %), takže výsledná chyba odpovídá rovněž chybě směrodatné.

Nyní uvedeme výsledky přímých měření a určíme jejich relativní chyby:

a) Napětí U = 4,0 V.
   Statistická chyba je zanedbatelná, proto bylo měřeno jednou. Použitý rozsah voltmetru byl 6 V. Voltmetr měl třídu přesnosti 1,5 %. Maximální absolutní chyba je proto 0,015 . 6 = 0,09 V. Příslušnou směrodatnou chybu bereme jako 0,6 . 0,09 = 0,054 (viz „Chyby měření“ odst. B), takže směrodatná relativní chyba napětí bude:

$$\xi U = \frac{\delta U}{U} = \frac{0{,}054}{4{,}0} = 0{,}014$$

   (Při výpočtech samozřejmě zaokrouhlujeme na 2 platné cifry.)

b) Proud I = 165 mA.
   Měřeno jednou digitálním ampérmetrem na rozsahu 200 mA. Maximální chybu v tomto případě udává výrobce jako 0,5 % čtení + 0,5 % rozsahu. Výsledná směrodatná absolutní chyba je tedy:

$$\delta I = (0{,}82 + 1{,}0) . 0{,}6 = 1{,}09 \text{ mA.}$$

Odtud

$$\xi I = \frac{\delta I}{I} = \frac{1{,}09}{165} = 0{,}0066 \ .$$

c) Vzdálenost spojů termočlánku l = 106 mm.
Měřeno jednou měřítkem s dělením stupnice 1 mm. Příslušná směrodatná chyba bude δl = 0,3 dílku = 0,3 mm (viz kap. „Chyby měření“, odst. B).

$$\xi l = \frac{\delta l}{l} = \frac{0{,}3}{106} = 0{,}0028$$

d) Průměr vzorku D.
Průměr vzorku byl měřen opakovaně 10× mikrometrem s nejmenším dílkem stupnice 0,01 mm. Naměřené hodnoty jsou:
20,27; 20,29; 20,21; 20,34; 20,95 ; 20,31; 20,29; 20,37; 20,36; 20,16 mm.
Aritmetický průměr $\overline{D} = 20{,}36$ mm.
Příslušná směrodatná chyba:

$$\delta\overline{D} = \overline{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_i (D_i - \overline{D})^2}{N.(N-1)}} = 0{,}07\,\text{mm}$$

Hodnota 20,95 se od průměrné hodnoty 20,36 liší o více než osminásobek směrodatné chyby, jedná se proto zřejmě o hrubou chybu (viz kap. „Chyby měření“, odst. A). Vynecháme-li tuto hodnotu, dostaneme pro průměr vzorku a jeho chybu nové výsledky: $\overline{D} = 20{,}29 \pm 0{,}02$ mm.
Směrodatná chyba čtení stupnice použitého mikrometru je:
δ_{M} = 0,3 dílku = 0,3 . 0,01 mm = 0,003 mm.
Protože chyba stupnice δ_{M} je více než šestkrát menší než chyba statistická $\delta\overline{D}$, můžeme ji zanedbat.
(Pokud by chyby byly porovnatelné, museli bychom použít pravidlo o skládání chyb $\delta D = \sqrt{(\delta_{\mathrm{M}})^2 + (\delta\overline{D})^2}$ podle kapitoly „Chyby měření“, odst. B)
Příslušná relativní chyba je tedy:

$$\xi D = \frac{\delta\overline{D}}{D} = \frac{0{,}02}{20{,}29} = 0{,}001 \ .$$

e) Rozdíl teplot $t_{\mathrm{A}} - t_{\mathrm{B}}$ = 3,8 °C
Teploty t_{A} a t_{B} byly při kalibraci termočlánku měřeny teploměrem s maximální chybou 0,3 °C. Příslušná směrodatná chyba je opět $0{,}6 \,.\, 0{,}3 = 0{,}18$, takže $\delta t_{\mathrm{A}} = \delta t_{\mathrm{B}}$ = 0,18 °C. Podle rovnice (3) je výsledná relativní chyba rozdílu teplot $t_{\mathrm{A}} - t_{\mathrm{B}}$:

$$\xi(t_{\mathrm{A}} - t_{\mathrm{B}}) = \frac{\sqrt{0{,}18^2 + 0{,}18^2}}{3{,}8} = 0{,}067$$

f) Chyba čísla π
Číslo π musíme udat na tolik platných míst, aby jeho chyba byla zanedbatelná

vůči ostatním chybám. K tomu zřejmě stačí položit $\pi = 3{,}14159$. Tomu odpovídá absolutní chyba menší než 0,000003 a relativní chyba menší než 0,000001. (Kalkulačky mají číslo π ještě přesnější.)

Z uvedených relativních chyb je největší chyba určení rozdílu teplot (6,7 %). Nemůžeme proto očekávat výslednou chybu menší než je tato. Vůči této hodnotě jsou nezanedbatelné chyba měření napětí (1,4 %) a chyba měření proudu (0,66 %). Zbývající chyby průměru vzorku a vzdálenosti spojů termočlánku jsou zanedbatelné. Dostaneme proto:

$$\xi\lambda = \sqrt{0{,}014^2 + 0{,}0066^2 + 0{,}067^2} = 0{,}069$$

Dosáhli jsme tedy úrovně přesnosti odpovídající 7 %.

Odhad nepřímo změřené tepelné vodivosti pak dostaneme ze vzorce (1): jest $\lambda = 56{,}94$. Uvážením velikosti relativní chyby získán jest konečný výsledek:

Tepelná vodivost vzorku činí 57 ± 4 W/mK.

(Zaokrouhlujeme! Chybu na 1 platnou cifru a odhadovanou hodnotu podle chyby – viz kap. „Chyby měření“, odst. E)

Námi zkoumaný vzorek byl ocelový. Nahlédnutím do tabulek zjistíme, že typická hodnota tepelné vodivosti pro ocel je 52 W/mK. Tabulková hodnota se liší od našeho výsledku o méně než dvojnásobek směrodatné chyby σ (= 4 W/mK), což se v praxi považuje za rozumnou shodu. Kdyby se náš výsledek lišil o hodnotu $(2 \div 3)\sigma$, pak je výsledek nerozhodnut a je vhodné měření opakovat.

Pokud by se tabulková hodnota odchylovala o hodnotu větší než 3σ od měřené hodnoty, učinili bychom závěr, že naměřená a tabulková hodnota tepelné vodivosti se neshodují (viz závěr kapitoly „Chyby měření“).