

Západočeská univerzita v Plzni¹
Fakulta aplikovaných věd

¹ Titulní stránka by měla obsahovat zde uvedené informace.

Závislost odporu vodičů na teplotě

Jiří Skvělý

TFYS2, Pondělí 13.30, lichý²

Datum měření: 14. 9. 2014

² Poznamenejte i svoji skupinu.

1 Úvod do problematiky

³Důležitou charakteristikou pevných látek je konduktivita γ , která je definována Ohmovým zákonem v diferenciálním tvaru: $j = \gamma E$, kde j je velikost proudové hustoty a E velikost intenzity elektrického pole. Podle velikosti konduktivity lze látky dělit zhruba do tří skupin: *nevodiče* $< 10^{-8} (\Omega \text{ m})^{-1} < \textit{polovodiče} < 10^6 (\Omega \text{ m})^{-1} < \textit{vodiče}$. Přímá úměrnost mezi j a E je důsledkem srážek elektronů s kmity atomů v krystalové mříži (fonony) nebo s poruchami pravidelné krystalické struktury (příměsi, dislokace, plošné poruchy). Tyto srážky lze popsat *relaxační dobou* τ , která udává, jak rychle se systém narušený vnějším polem vrací do rovnováhy. V případě srážek elektronů s fonony je relaxační doba totožná se střední dobou mezi dvěma srážkami. Pro konduktivitu lze odvodit vztah:

$$\gamma = \frac{e^2 n \tau}{m^*} = e n \mu_n, \quad (1)$$

kde e je elementární náboj⁴, n je koncentrace elektronů, m^* je efektivní hmotnost elektronů a μ_n ⁵ je jejich pohyblivost.

Řádové rozdíly v hodnotách konduktivity kovů (vodiče) a polovodičů a rovněž její rozdílnou teplotní závislost vysvětluje pásová teorie pevných látek. Elektrony obsazují pásy dovolených energií, které jsou od sebe odděleny pásy zakázaných energií (tzv. zakázané pásy).

1.1 Vodiče (kovy)

V kovech je vodivostní pás typicky zaplněn právě do poloviny. Teplotní závislost odporu (vodivosti) je dána teplotní závislostí relaxační doby resp. pohyblivosti. Se zvyšující se teplotou roste amplituda kmitů iontů a zvyšuje se tak pravděpodobnost srážek elektronů s ionty. Střední doba mezi dvěma srážkami (relaxační doba) klesá, a tedy klesá konduktivita kovu (roste rezistivita ρ).

Závislost odporu kovů na teplotě lze v širokém teplotním oboru (s výjimkou nízkých teplot) dosti přesně popsat polynomem druhého stupně. Pro nepřiliš široké intervaly teplot často postačuje uvažovat pouze lineární závislost a odpor měřeného vzorku vyjádřit pomocí vztahu:⁶

$$R = R_0 [1 + \alpha (t - t_0)], \quad (2)$$

kde R_0 je odpor při teplotě $t_0 = 0^\circ\text{C}$ a α je teplotní součinitel odporu.

³ V této části popište stručně svými slovy danou problematiku. Opsání celého návodu k úloze není žádoucí. Důležité je uvést klíčové vztahy (ať už vzorce, nebo kvalitativní komentáře), které jsou nutné pro zpracování naměřených dat ale i závěrečnou diskuzi.

⁴ Pro každé označení veličiny nebo konstanty, které se v referátu vyskytuje poprvé, je nutné uvést slovní popis.

⁵ Viz *Pravidla pro správnou sazbu* na \Rightarrow stránkách KFY.

⁶ Vzorce číslujte, abyste se na ně mohli v početní části odkázat.

2 Pracovní úkol

7

1. Proměřte závislost odporu vodiče na teplotě v rozsahu 30 °C s krokem nejvýše 2 °C.
2. Spočítejte průměrnou hodnotu teplotního součinitele odporu a jeho směrodatnou chybu. Výsledek запиšte ve tvaru $\bar{\alpha} \pm \delta\alpha$ a správně zaokrouhlete.
3. Naměřenou závislost $R(t)$ znázorněte graficky a spočítejte rovnici této přímkové závislosti lineární regrese. Z koeficientů rovnice ($R = kt + q$) určete srovnáním s rovnicí (2) součinitel α a odpor R_0 . Obě hodnoty teplotního součinitele odporu porovnejte s tabulkovou hodnotou.

3 Postup měření

⁸ Vychlazenou kádinku s vodičem v olejové lázni postavíme na magnetickou míchačku s ohřevem. Připravené vývody měřeného prvku (vodiče) připojíme k RLC měřiči a na měřiči nastavíme optimální rozsah (viz Obr. 1⁹). Po spuštění a ustálení míchání a následném sepnutí ohřevu zaznamenáváme s teplotním krokem 2 °C teplotu a elektrický odpor do tabulky (Tab. 1).

3.1 Měřicí potřeby

10

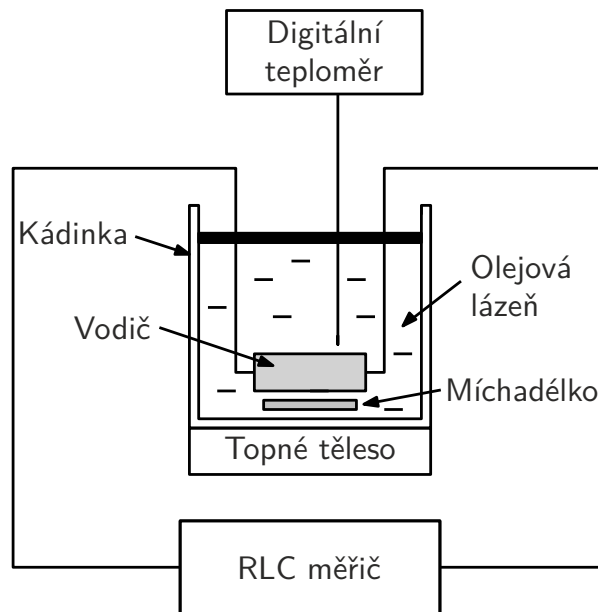
- magnetická míchačka
- RLC měřič E317
- digitální teploměr GTH 175/Pt
- vodič v olejové lázni

⁷ Tato část se může lišit od pracovního úkolu uvedeného v návodu k úloze. Uveďte konkrétní zadání, které vám sdělil vyučující při měření, tedy to, *co jste měli opravdu měřit*.

⁸ Velmi *stručně* shrňte postup měření tak, aby byla zřejmá metodika. Je například zřejmé a tudíž nežádoucí psát, že je např. nutné lednici otevřít a poté zavřít. Na druhou stranu musí být i pouze okrajově infromovanému čtenáři jasné, co jste dělali.

⁹ Na každý obrázek i tabulku je nutné v textu uvést odkaz, nestačí je umístit poblíž místa, ke kterému se váží.

¹⁰ Heslovitě uveďte seznam přístrojů a ostatních potřeb k měření. U přístrojů poznamenejte i typ (pro kontrolu určování přesnosti měření).



Obr. 1: Schematické znázornění uspořádání experimentu.¹¹

¹¹ Každý obrázek i tabulka musí být uvedeny s popisem, který zhruba ozřejmuje jejich obsah i bez předchozího čtení textu. Výjimečně je možné použít větu typu „Detailní popis uveden v textu.“. Obrázek by měl být výstižný, přehledný, zároveň v dostatečném rozlišení. Obrázek ze skript většinou není vhodný, nemusí přesně odpovídat situaci. Může být zbytečně podrobný, ale také nemusí být srozumitelný bez znalosti celého doprovodného textu.

4 Naměřené a vypočítané hodnoty

Naměřené hodnoty a výsledky mezivýpočtů jsou uvedeny v tabulce 1.

Nejdříve postupnou metodou vypočítáme hodnoty teplotního součinitele odporu α_i ¹²

$$\alpha_i = \frac{R_{i+8} - R_i}{R_i t_{i+8} - R_{i+8} t_i}, \quad \text{př.: } \alpha_i = \frac{4,49 - 4,25}{4,25 \cdot 22,0 - 4,49 \cdot 6,0} \approx 3,601 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}.$$

a následně i průměrnou hodnotu $\bar{\alpha}$:

$$\bar{\alpha} = \frac{\sum \alpha_i}{n} \approx \frac{0,030161}{8} \approx 3,77 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}.$$

Vypočítáním odchylky Δ_{α} od průměrné hodnoty teplotního součinitele odporu $\bar{\alpha}$

$$\Delta_{\alpha i} = |\alpha_i - \bar{\alpha}|, \quad \text{př.: } \Delta_{\alpha 1} \approx |3,605 \times 10^{-3} - 3,770 \times 10^{-3}| \approx 1,645 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$$

¹² Pro výpočty je nutné uvést obecný vztah a poté dosadit numerické hodnoty. U opakovaných dílčích výpočtů se uvádí jeden příklad dosazení (typicky první řádek vypočítávaných hodnot v tabulce).

a následně její druhé mocniny

$$\Delta_{\alpha_i}^2 = (\alpha_i - \bar{\alpha})^2, \quad \text{př.: } (\alpha_1 - \bar{\alpha})^2 \approx (1,645 \times 10^{-4})^2 \approx 2,705 \times 10^{-8} \text{ K}^{-2}$$

lze určit chybu měření jako¹³

$$\bar{\sigma}_{\alpha} = \sqrt{\frac{\sum \Delta_{\alpha}^2}{n(n-1)}} \approx \sqrt{\frac{1,641 \times 10^{-7}}{8(8-1)}} \approx 0,051 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

a výslednou hodnotu teplotního součinitele odporu

$$\alpha = (3,77 \pm 0,05) \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}. \quad 14$$

Pro ověření našeho výpočtu vykreslíme naměřené hodnoty odporu při různých teplotách do grafu (Obrázek 2), provedeme lineární aproximaci dat¹⁵

$$q = \frac{\sum_1^n x_i^2 \sum_1^n y_i - \sum_1^n x_i y_i \sum_1^n x_i}{n \sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2} \approx \frac{8416 \cdot 71,56 - 1523,82 \cdot 336}{134656 - 112896} \approx 4,147 \, \Omega,$$

$$k = \frac{n \sum_1^n x_i y_i - \sum_1^n x_i \sum_1^n y_i}{n \sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2} \approx \frac{24381 - 336 \cdot 71,56}{134656 - 112896} \approx 0,0155 \, \Omega \cdot \text{K}^{-1}.$$

Získanou rovnicí aproximační přímky

$$R = q + k \cdot t \quad \rightarrow \quad \{R\} = 4,147 + 0,0155 \{t\}$$

porovnáme s teoretickým vztahem (2) pro teplotní součinitel odporu: Pro $t_0 = 0$ dostáváme, že

$$R = R_0 + R_0 \alpha t \quad \rightarrow \quad R_0 \approx 4,147 \, \Omega,$$

$$\alpha^{\text{fit}} = \frac{k}{q} \approx 3,73 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}.$$

¹³ Pokud není uvedeno jinak, počítá se směrodatná chyba aritmetického průměru, \Rightarrow skripta str. 15.

¹⁴ Zde je vidět **korektní zápis konečného výsledku**. Se správně zaokrouhlenou chybou (na jedno platné místo) a příslušnou jednotkou. Aritmetický průměr je zaokrouhlen na stejnou přesnost. (v tomto případě tedy $0,01 \times 10^{-3}$). Více o tomto ve skriptech, \Rightarrow str. 19. nebo ve \Rightarrow zkrácené verzi.

¹⁵ Není nutné provádět lineární fit ručně a vypisovat postup (i když možné to je). Pro většinu úloh postačí koeficienty, které spočítá tabulkový procesor.

Pozn.: pozor na některé programy, které zobrazují koeficienty s nedostatečnou přesností. V případě dalších matematických operací (například zde dělíme k/q) pak může dojít k nežádoucímu zkreslení výsledků.

Tab. 1: Naměřené hodnoty odporů R , vypočítané hodnoty teplotního součinitele odporu α_i , směrodatné chyby Δ_{α_i} a druhé mocniny směrodatné chyby $\Delta_{\alpha_i}^2$ pro různé hodnoty teploty vodiče t_i .¹⁶

t_i [°C]	R_i [Ω]	t_{i+8} [°C]	R_{i+8} [Ω]	α_i [10^{-3} K^{-1}]	Δ_{α_i} [10^{-4} K^{-1}]	$\Delta_{\alpha_i}^2$ [10^{-8} K^{-2}] ¹⁷
6,0 ¹⁸	4,25	22,0	4,49	3,606	1,645	2,705
8,0	4,27	24,0	4,52	3,770	0,006	0,000 ¹⁹
10,0	4,30	26,0	4,56	3,927	1,573	2,473
12,0	4,32	28,0	4,58	3,939	1,692	2,862
14,0	4,35	30,0	4,61	3,942	1,716	2,943
16,0	4,41	32,0	4,65	3,597	1,731	2,997
18,0	4,43	34,0	4,68	3,766	0,040	0,002
20,0	4,45	36,0	4,69	3,614	1,558	2,426

¹⁶ Popisky tabulek je zvykem umístit nad tabulky. Popisky obrázků se umísťují pod. V popisku tabulky je vhodné okomentovat označení jednotlivých veličin tak, aby pro porozumění nebylo nutné procházet text.

¹⁷ V záhlaví tabulky je u veličin nutné uvést jednotku. Buď to ve tvaru t [°C], nebo $t/^\circ\text{C}$, často je pro přehlednost vhodné vytknout do záhlaví i mocninu.

¹⁸ Zápis čísla obsahuje i informaci o přesnosti měření. Zde bylo měření prováděno s přesností 0,1 °C. Napsat jen „6“ (bez desetinné čárky a nuly) je nepřijatelné.

¹⁹ Při zobrazení mezivýsledků je vhodné/nutné z důvodu přehlednosti tyto zaokrouhlit, do následujících výpočtů však používejte nezaokrouhlená data (typicky se o to postará sám tabulkový procesor). Výsledek až nakonec zaokrouhľete podle pravidel \Rightarrow na str. 19 skript.

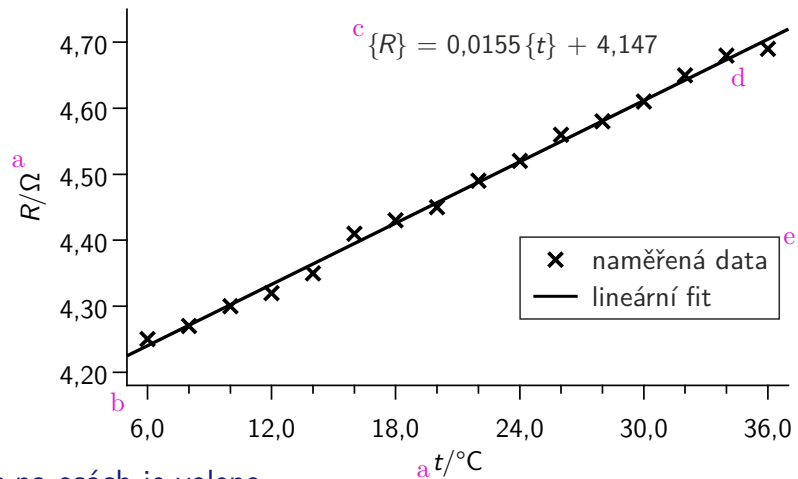
^a Popisek osy v některém z přípustných tvarů:

$t/^{\circ}\text{C}$
 $t [^{\circ}\text{C}]$
Teplota $t (^{\circ}\text{C})$

Pokud není název veličiny uveden v popisku osy, musí být popsán v popisku celého grafu.

^c Konkrétní rovnice prokládané funkce s koeficienty, (např. rovnice přímky)

^d Volte výrazné symboly (např. \times \blacksquare \bullet), v případě jedné sady dat se preferuje černobílý vzhled.



^b Dělení a měřítko stupnic na osách je voleno tak, aby závislost vyplňovala celou plochu grafu.

^e Legenda slouží k rychlému zorientování se v datech.

Obr. 2: Závislost elektrického odporu R měřeného vodiče na teplotě t .²⁰

²⁰ Vzhledu grafů věnujte zvýšenou pozornost. U většiny úloh se jedná o hlavní výsledek. Zásady pro tvorbu grafů jsou uvedeny podrobně v kapitole *Grafické zobrazení naměřených závislostí* na \Rightarrow str. 25 skript.

5 Závěr

²¹Naměřená data pro vodič splňují předpoklad lineární závislosti elektrického odporu na teplotě. Mohli jsme tedy použít postupnou metodu k určení průměrného teplotního součinitele odporu. Jeho hodnota je $\alpha = (3,77 \pm 0,05) \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Naměřená data jsme následně znázornili graficky a provedli jejich lineární aproximaci. Porovnáním rovnice přímky lineární aproximace a teoretické teplotní závislosti jsme určili teplotní součinitel odporu $\alpha^{\text{fit}} = 3,73 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ a odpor $R_0 = 4,15 \Omega$.

Hodnoty zjištěné oběma metodami se v rámci chyby určené z postupné metody shodují.

Porovnáním naměřené hodnoty s tabulkami můžeme říci, že se pravděpodobně jedná o vodič ze zinku ($3,7 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$).

V rámci chyby je možné uvažovat ještě o hliníku, mědi či platině (všechny přibližně $3,9 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$). Pro vyloučení více možností by bylo nutné provést měření s větší přesností (např. pomalejší ohřev, měření více bodů), nebo zjistit další vlastnosti materiálu, které se pro dané materiály liší (např. rezistivita, hustota).

²¹ V této části ještě jednou uveďte v korektním tvaru hlavní výsledky (z pracovního úkolu). Kriticky zhodnoťte měření, odhadněte možný původ případných systematických chyb a celkovou přesnost získaných dat. Diskutujte možné úpravy experimentu pro dosažení spolehlivějších výsledků.