

Další velmi užitečné výsledky kinetické teorie

Kinetická teorie nám umožní definovat a vypočítat další zajímavé veličiny, které jsou velmi přínosné ve vakuové fyzice a technice :

1. Částicový déšť

Veličina *částicový déšť* určuje střední počet nárazů molekul na stěnu – definovaný za jednotku času na jednotku plochy .

Je to velmi užitečná, přímo základní veličina při zkoumání interakcí částic plynu s povrchy pevných látek ve vakuovém systému - v první řadě s vnitřním povrchem ohraničujících stěn (v minulé kapitole jsme už prozkoumali základní interakci částic s povrchem – pružnou srážku – a úspěšně jsme odvodili její důsledek – tlak plynu.) Veličina *částicový déšť* má ale širší využití – s její pomocí můžeme stanovit počet dopadů molekul na pouze myšlenou plochu, umístěnou kdekoli v objemu plynu a definovat tak částicový tok touto plochou (jako počet částic prošlý danou plochou za jednotku času).

Při jejím výpočtu by principiálně bylo možné použít stejný postup, jako při výpočtu tlaku - tj. mohli bychom tuto veličinu vyjádřit jako :

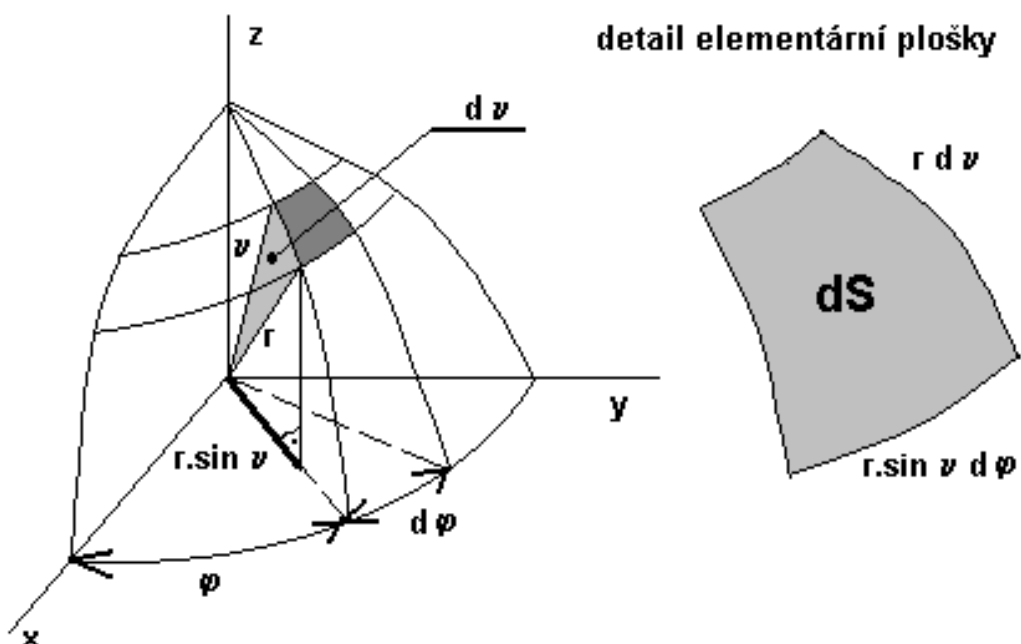
$$Z = \frac{1}{dt dS} \cdot \int_0^\infty \frac{dN}{V} v_x dS dt.$$

Uvažte však, že tento integrál už nebude možné převést na známou střední hodnotu (obsahuje lichou funkci). Musíme proto použít jiný postup :

Využijeme skupinu molekul dN , které mají podle Maxwellova rozdělení velikost rychlosti v intervalu dv – tj. všechny tyto molekuly mají prakticky stejnou velikost rychlosti :

$$dN = f(v) \cdot dv$$

A směr vektorů jejich rychlosti vyjádříme pomocí sférických souřadnic – viz následující obrázky :



V těchto souřadnicích je směr vektoru určen dvěma úhly (ϑ, φ). Avšak – i když máme obrovský soubor molekul plynu, nemusí mít tento přesný směr ani jediná molekula (je to stejné, jako bychom zvolili určitou velikost rychlosti na ose v – také by ji nemusela mít žádná molekula).

Je tedy nutno – stejně jako na ose velikosti rychlostí – zvolit pro úhly malé, diferenciální intervaly. Stanovíme tedy, aby úhly ϑ, φ ležely v zadaných (velmi malých, diferenciálních) spojitých intervalech velikosti $d\vartheta, d\varphi$ - tedy aby platilo :

$$\vartheta \in (\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$$

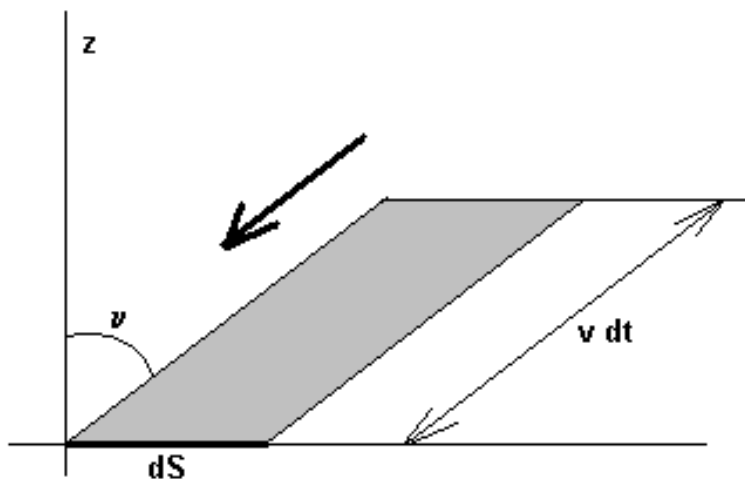
$$\varphi \in (\varphi, \varphi + d\varphi)$$

Jak je vidět z obrázku, touto volbou vlastně zadáme (velmi malý, diferenciální) **prostorový úhel**, ve kterém už jistě budou ležet vektory rychlostí nenulového počtu molekul :

$$d\omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{rd\vartheta r \sin \vartheta d\varphi}{r^2} = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Všechny molekuly ovšem létají do všech možných úhlů - tedy do celého prostorového úhlu 4π . Do zadaného úhlu $d\omega$ pak směřuje pouze úměrná část z celkového počtu molekul, daná poměrem:

$$\boxed{\frac{d\omega}{4\pi}}$$



Dále uvažme, že při zadaném směru rychlosti (ϑ, φ) mohou na plošku velikosti dS dopadnout za čas dt molekuly až z maximální vzdálenosti $v \cdot dt$ - tedy celkem na dopadnou všechny molekuly ze šikmého válce o objemu:

$$dS \cdot v dt \cdot \cos \vartheta$$

A pak jen sečteme všechny tyto molekuly pro všechny možné velikosti a všechny možné směry rychlosti (odpovídající dopadům molekul na plošku dS z celého poloprostoru):

$$Z = \frac{1}{dt dS} \cdot \int_{v=0}^{\infty} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{dN}{V} \cdot dS \cdot v \cdot dt \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{d\omega}{4\pi} =$$

$$= \frac{1}{4\pi V} \frac{N}{N} \cdot \int_0^{\infty} v f(v) dv \cdot \int_0^{\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4} \frac{N}{V} \bar{v} = \frac{1}{4} n \bar{v}.$$

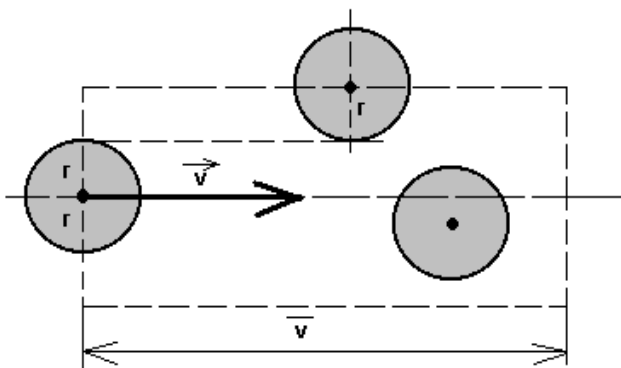
Výsledný vzorec pro **částicový déšť** je tedy velmi jednoduchý :

$$Z = \frac{1}{4} \cdot n \bar{v}$$

Počet nárazů částic za jednotku času na jednotku plochy

2. Střední volná dráha

Tato veličina charakterizuje délku dráhy, kterou molekula uletí mezi dvěma srážkami. U neuspořádaného pohybu molekul jsou samozřejmě délky drah mezi dvěma po sobě jdoucími srážkami různé a proto se počítá **střední hodnota** těchto drah. Vztah pro střední dráhu lze odvodit z jednoduchého modelu, který ukazuje následující obrázek:



Předpokládáme, že všechny molekuly jsou v klidu a pouze jedna se pohybuje rychlostí o velikosti \bar{v} . Tato molekula - jako koule o poloměru r - uletí za jednotku času dráhu velikosti \bar{v} a narazí přitom do všech molekul, které jsou od její dráhy vzdálené maximálně o vzdálenost $R = 2r$, tedy narazí do všech molekul v objemu:

$$\pi R^2 \cdot \bar{v}$$

Počet molekul v tomto objemu vyjádříme pomocí koncentrace molekul jako :

$$n \cdot \pi R^2 \cdot \bar{v}$$

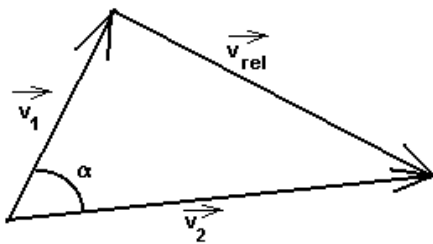
Tento počet molekul je pak roven počtu srážek, ke kterým dojde na vzdálenosti \bar{v} . Tedy průměrná vzdálenost mezi dvěma srážkami bude jednoduše :

$$\bar{l} = \frac{\bar{v}}{n\pi R^2 \bar{v}} = \frac{l}{n\pi R^2} = \frac{l}{n4\sigma}$$

kde jsme označili σ geometrický příčný průřez molekuly :

$$\sigma = \frac{\pi R^2}{4}$$

Předpoklad o nehybnosti ostatních molekul jistě není správný - je nutné ještě uvažovat vzájemnou rychlost mezi vybranou molekulou a ostatními molekulami - tedy její **relativní rychlost**:



Podle obrázku určíme relativní rychlost jako rozdíl rychlostí uvažované molekuly a některé sousední molekuly :

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1;$$

Jestliže použijeme cosinovou větu :

$$v_{rel}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha$$

a uděláme formálně střední hodnoty na obou stranách, dostaneme :

$$\overline{v_{rel}^2} = \underbrace{\overline{v_1^2}}_{\overline{v^2}} + \underbrace{\overline{v_2^2}}_{\overline{v^2}} - \underbrace{2\overline{v_1v_2 \cos \alpha}}_0$$

Pak uvážíme, že na pravé straně poslední člen je nulový (proč ?) a první dva členy jsou střední kvadratické rychlosti, tedy dostaneme :

$$\overline{v_{rel}^2} = 2\overline{v^2}$$

z toho pak odmocněním dostaneme jednoduše (přesné odvození ovšem není jednoduché):

$$\overline{v_{rel}} = \sqrt{2} \cdot \overline{v}$$

Po dosazení do vzorce pro střední volnou dráhu pak vznikne přesnější vztah:

$$\bar{l} = \frac{l}{n4\sqrt{2}\sigma}$$

Střední volnou dráhu dále ovlivňuje napohled překvapivá **závislost σ na rychlosti molekul** - tj. na teplotě plynu. Jedná se ale vlastně o známý jev, zcela běžný při studiu vzájemných reakcí různých částic v chemii, ve fyzice plazmatu, v jaderné fyzice kdy původně geometrický průřez částic dostává smysl **účinného průřezu reakce** (určuje rychlost jejího průběhu) – a není již konstantní, ale obecně závisí na různých veličinách, zejména na druhu reagujících částic, na druhu jejich vzájemné reakce (interakce) a také na jejich energii (kinetické).

Můžeme například uvážit, že v případě, kdy se dvě částice přitahují (dva ionty opačných znamének) – bude zřejmě účinný průřez jejich interakce větší než geometrický průřez a při zpomalování vzájemného pohybu před srážkou se bude účinný průřez ještě více zvětšovat. (analogicky v případě odpudivých sil).

(V jaderné fyzice je. všeobecně známá závislost účinného průřezu štěpení jádra uranu po dopadu neutronu, která vyvozuje nutnost používání moderátoru ve štěpném reaktoru)

V našem případě výpočtu střední volné dráhy se jedná a interakci dvou neutrálních molekul plynu, druhem jejich reakce je pružná srážka a závislost účinného průřezu na jejich energii je vyjádřena **Sutherlandovým vztahem** :

$$\sigma = \sigma_{\infty} \cdot \left(1 + \frac{T_d}{T}\right)$$

kde

σ_{∞} je σ pro $T \rightarrow \infty$ a T_d je tzv. teplota zdvojení (pro $T = T_d$ je $\sigma = 2\sigma_{\infty}$)

Pak výsledný vztah pro střední volnou dráhu je:

$$\bar{l} = \frac{l}{n4\sqrt{2}\sigma_{\infty}\left(1 + \frac{T_d}{T}\right)}$$

Střední volná dráha

Dosadíme-li ještě za koncentraci n ze stavové rovnice $p = nkT$, dostaneme:

$$\bar{l} \cdot p = \frac{kT}{4\sqrt{2}\sigma_{\infty}\left(1 + \frac{T_d}{T}\right)}$$

Součin střední volné dráhy a tlaku

Je vidět, že součin $\bar{l}p$ je konstantní pro daný plyn a danou teplotu.

Speciálně: $N_2, 0^\circ C$: $R_{\infty} = 3,2 \cdot 10^{-10} m$ ($R_0 = 3,78 \cdot 10^{-10} m$)

$T_d = 98-107 K$ (pro 90-1000 K)

$\bar{l} \cdot p = 4,4 \cdot 10^{-5} m \cdot mTorr = 5,9 \cdot 10^{-5} m \cdot mbar$

$O_2, 0^\circ C$: $R_{0^\circ C} = 3,62 \cdot 10^{-10} m$

$\bar{l} \cdot p = 4,9 \cdot 10^{-5} m \cdot mTorr$

Udává se pro vzduch (20 °C):

$$\bar{l} \cdot p = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{mTorr} = 6,65 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{mbar}$$

3. Počet srážek (jediné) částice za jednotku času

Když použijeme základní úvahy z počátku minulého odstavce o střední volné dráze, dostaneme :

$$z = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{n4\sigma\bar{v}}{l} = \frac{\bar{v}}{\bar{l}}$$

4. Objemová hustota srážek

Další používanou veličinou je *počet srážek (všech částic) v jednotce objemu za jednotku času*, též nazývanou *objemová hustota srážek*. Víme, že v jednotce objemu je n molekul a každá z nich absolvuje z srážek za jednotku času, celkem tedy $n \cdot z$ srážek. Tím jsme ale každou srážku započítali dvakrát a výsledek musíme vydělit dvěma:

$$\Delta Z = \frac{1}{2} n z = \frac{1}{2} \frac{n\bar{v}}{\bar{l}}$$

5. Střední vzdálenost molekul

Tato veličina se někdy počítá pro odhad vzdáleností molekul v plynu, přičemž použijte představy, že molekuly jsou pravidelně rozmístěny v bodech kubické mřížky. Jedné molekule tak přísluší jedna elementární krychle o hraně a , tedy objem a^3 . Z definice hustoty pak plyne:

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{n}}$$

Domácí úkol

Vypočítejte a porovnejte všechny definované veličiny pro několik tlaků v celém oboru vakua.

Stanovte také koncentraci molekul n ze stavové rovnice plynu $p = nkT$, při teplotě 20 °C.

Návod k řešení : Použijte předchozí rovnice s jednoduchými úpravami :

$$p = nkT \Rightarrow n = \frac{p}{kT} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{l}{n}}$$

$$\bar{l} \cdot p = konst. \Rightarrow \bar{l} = \frac{konst.}{p}$$

$$z = \frac{\bar{v}}{\bar{l}} \quad \text{kde} \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kTN_a}{\pi m N_a}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

$$\Delta Z = \frac{l}{2} \frac{\bar{v}}{\bar{l}} = \frac{l}{2} n z$$

$$Z = \frac{l}{4} \bar{v}$$

p [Pa]	p [mbar]	n [mm ⁻³]	a [mm]	\bar{l} [m]	z [s ⁻¹]	ΔZ [s ⁻¹ mm ⁻³]	Z [s ⁻¹ mm ⁻²]
10 ⁵	10 ³	2,5 · 10 ¹⁶	3,4 · 10 ⁻⁶	6,65 · 10 ⁻⁸	7 · 10 ⁹	8,8 · 10 ²⁵	2,9 · 10 ²¹
10 ²	10 ⁰	2,5 · 10 ¹³	3,4 · 10 ⁻⁵	6,65 · 10 ⁻⁵	7 · 10 ⁶	8,8 · 10 ¹⁹	2,9 · 10 ¹⁸
10 ⁻¹	10 ⁻³	2,5 · 10 ¹⁰	3,4 · 10 ⁻⁴	6,65 · 10 ⁻²	7 · 10 ³	8,8 · 10 ¹³	2,9 · 10 ¹⁵
10 ⁻⁵	10 ⁻⁷	2,5 · 10 ⁶	7,4 · 10 ⁻³	665	0,7	8,8 · 10 ⁵	2,9 · 10 ¹¹
10 ⁻¹¹	10 ⁻¹³	2,5	0,74	665 · 10 ³	7 · 10 ⁻⁷	8,8 · 10 ⁻⁷	2,9 · 10 ⁵

Podrobně prozkoumejte hodnoty v tabulce a jejich intervaly.

Nalezněte zajímavé souvislosti.

Které veličiny jsou asi nejdůležitější, v jakých situacích ?