

Objemové procesy v plynu

Z termodynamiky víme, že v nerovnovážné termodynamické soustavě, kde jsou například různé teploty nebo tlaky, probíhají makroskopické procesy, které mohou soustavu přivést do stavu termodynamické rovnováhy. Tyto procesy lze obecně fyzikálně charakterizovat jako přenos hmoty, energie a impulzu a jejich charakter výrazně závisí na vztahu střední volné dráhy molekul plynu a lineárního rozměru systému d , ve kterém proces přenosu probíhá.

Často se používá veličina :

$$Kn = \frac{d}{\bar{l}} \quad \text{Knudsenovo číslo}$$

Jestliže je za vyšších tlaků střední volná dráha molekul velmi malá - tak, že ve srovnání s lineárním rozměrem systému platí nerovnost:

$$\bar{l} \ll d \quad \text{nebo-li} \quad Kn \gg 1 \quad \dots\dots\dots\text{tzv. } \textit{viskózní podmínky}$$

potom přenos fyzikální veličiny, například tepla, probíhá uvnitř plynu pouze vzájemnými srážkami nejbližších molekul a plyn se podobá spojité viskózní látce (přenos tepla na stěny se samozřejmě děje srážkami molekul a stěny).

Jestliže naopak za nižších tlaků bude střední volná dráha molekul velmi malá - tak, že ve srovnání s lineárním rozměrem systému bude platit nerovnost:

$$\bar{l} \gg d \quad \text{nebo-li} \quad Kn \ll 1 \quad \dots\dots\dots\text{tzv. } \textit{molekulární podmínky}$$

potom přenos fyzikální veličiny, například tepla, probíhá téměř výlučně srážkami molekul se stěnami, přičemž každá molekula plynu interaguje zcela individuálně.

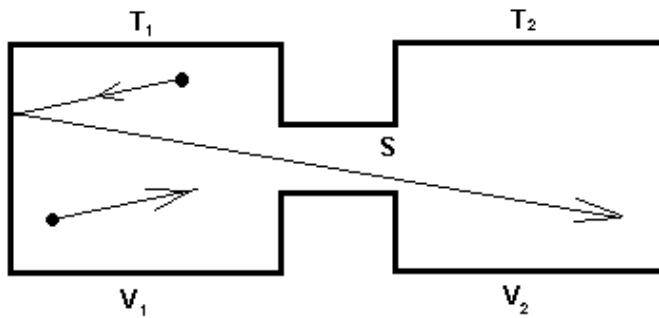
Přechodové podmínky, kdy střední volná dráha molekul je srovnatelná s rozměrem systému:

$$\bar{l} \approx d \quad \text{nebo-li} \quad Kn \approx 1 \quad \text{lze označit jako } \textit{viskózně molekulární podmínky}$$

1. Tepelná transpirace (efúze) plynu

Ze zkušenosti víme, že když propojíme dvě tlakové nádoby s plynem (například plnou a prázdnou), plyn se přemístí tak, že tlaky se v nádobách po určité době výrovnejí. K tomuto ovšem dojde pouze za vyšších tlaků, kdy se plyn podobá spojité viskózní látce, kdežto za nízkých tlaků při molekulárních podmínkách pozorujeme velmi zajímavý jev *nevyrovnání tlaku* v obou nádobách (*efúzní paradox*) :

Předpokládejme dvě uzavřené nádoby (objemy), spojené otvorem plochy S (viz obr.). Za molekulární podmínky $\bar{l} \gg d$ se částice plynu vzájemně prakticky nesrážejí, jejich srážky jsou prakticky pouze s okolními stěnami.



Předpokládejme nejprve, že v obou nádobách je na počátku stejná teplota i koncentrace plynu (rovnovážný stav) - pak z levé nádoby dopadá na plochu S (a vniká do pravé nádoby) za jednotku času počet molekul – jinak řečeno *proud (tok) molekul* :

$$J_1 = SZ = S \frac{1}{4} n \bar{v} = S \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = konst \cdot n \sqrt{T}$$

a samozřejmě - z pravé strany dopadá na plochu S (a vniká do levé nádoby) proud stejný:

$$J_2 = SZ = S \frac{1}{4} n \bar{v} = S \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = konst \cdot n \sqrt{T}$$

Tedy napíšme pro názornost :

$$J_1 = konst \cdot n \sqrt{T} = konst \cdot n \sqrt{T} = J_2$$

A uvažme : jestliže nyní zahřejeme například levou nádobu na teplotu vyšší než je teplota pravé nádoby $T_1 > T_2$, pak bude

$$J_1 = konst \cdot n \sqrt{T_1} > konst \cdot n \sqrt{T_2} = J_2$$

a zleva doprava bude přecházet více molekul než směrem opačným - tedy v pravé nádobě se bude zvětšovat jejich koncentrace až na nějakou hodnotu větší než v levé nádobě $n_2 > n_1$, při které se proudy molekul opět vyrovnají (a nastane opět rovnovážný stav):

$$J_1 = konst \cdot n_1 \sqrt{T_1} = konst \cdot n_2 \sqrt{T_2} = J_2$$

Bude tedy platit :

$$n_1 \sqrt{T_1} = n_2 \sqrt{T_2}$$

nebo-li :

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Při rozdílných teplotách budou tedy v pravé a levé nádobě za rovnovážného stavu různé koncentrace, tedy i tlaky plynu (podle stavové rovnice):

$$p_1 = n_1 k T_1 \quad p_2 = n_2 k T_2$$

Po dosazení :

$$\left(\frac{p_1}{kT_1}\right) \cdot \left(\frac{kT_2}{p_2}\right) = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Dostaneme vztah pro tlaky v obou nádobách:

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

To je prakticky velmi důležité pro měření tlaku v oboru vysokého vakua.

Například: Máme vakuovou pec o teplotě $T_1 = 2000 \text{ K}$ a chceme změřit tlak uvnitř ($p_1 = ?$). Tlakoměr umístíme mimo pec do malé komůrky, kde je teplota $T_2 = 293 \text{ K}$, a ten bude ovšem měřit odlišný tlak p_2 :

$$p_1 = p_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = p_2 \sqrt{\frac{2000}{293}} = 2,61 \cdot p_2$$

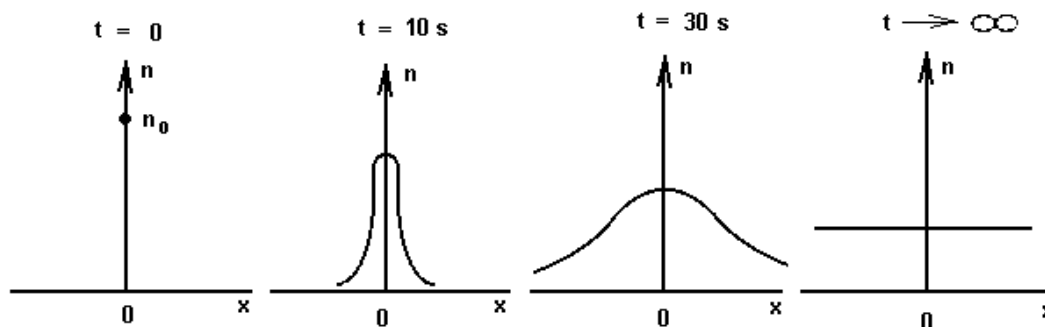
2. Difúze plynu

Na rozdíl od předchozího jevu je difúze plynu typickým jevem při vyšších tlacích, kdy molekuly konají velké množství srážek a jejich střední volná dráha je malá, tedy při viskózních podmínkách $\bar{l} \ll d$.

Nechť v počátečním čase $t = 0$ jednorázově zavedeme do určitého místa ($x = 0$) jednoho plynu nějaké množství druhého plynu (příměsi), tak, že v tomto místě vznikne počáteční nenulová koncentrace n_0

S postupem času - jako důsledek neuspořádaného pohybu - pronikají molekuly příměsi dál a dál od počátečního místa $x = 0$, jejich koncentrace bude nenulová i mimo počátek a neustále roste (ale v počátku je samozřejmě stále největší) a tento proces nazýváme difúzí druhého plynu (příměsi) v plynu prvním.

Po určité době (relaxační) se koncentrace všude vyrovná - difúze skončí, nastane rovnovážný stav, charakterizovaný všude stejnou koncentrací příměsi.



Je tedy základní charakteristikou probíhající difúze nějakého plynu (příměsi) v jiném plynu, že koncentrace příměsi je funkcí místa:

$$n = n(\vec{r}) = n(x, y, z)$$

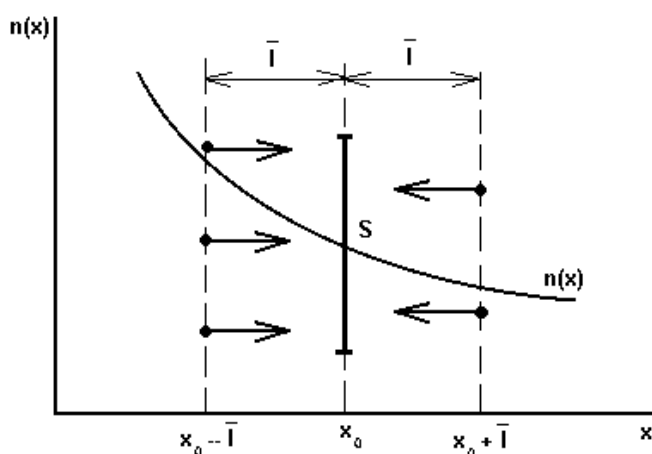
Pro jednoduchost prozkoumáme pouze jednorozměrný příklad, ve kterém bude koncentrace příměsného difundujícího plynu funkcí jediné souřadnice:

$$n = n(x).$$

Při výpočtu využijme nejjednodušší představu plynu – tzv. jednorozměrný **vrstvý model plynu** :

- 1) Všechny molekuly se pohybují stejnou rychlostí, rovnou střední rychlosti \bar{v} - a v jednorozměrném případě se navíc všechny molekuly pohybují jen rovnoběžně s osou x (v kladném, nebo záporném směru osy).
- 2) Všem molekulám plynu také přiřadíme stejnou délku dráhy mezi dvěma srážkami, rovnou střední volné dráze \bar{l} – jejich dráha se tedy skládá ze stále stejných úseček, rovnoběžných s osou x

Na obrázku je vyznačena koncentrace difundujícího plynu (napravo od místa $x = 0$) - jako klesající funkce $n(x)$.



Pro stanovení proudu plynu si představme plochu S v místě x_0 , kolmou na souřadnou osu x (viz obr.). Podle vztahu pro částečkový dešť na tuto plochu dopadá za jednotku času zleva větší počet molekul než ze strany pravé

Uvažme dále, z jakých míst pocházejí tyto molekuly, dopadající na plochu S zleva i zprava? Letí jistě z míst jejich posledních srážek a tato místa jsou různě vzdálená od plochy S - maximálně však jsou ve vzdálenosti rovné střední volné dráze – tedy na plochách rovnoběžných s plochou S , na souřadnicích $(x_0 - \bar{l})$ a $(x_0 + \bar{l})$.

Vzájemné srážky molekul mají obecně pro objemové procesy v plynu zásadní význam, protože v nich dochází ke změnám rychlostí molekul – mění se tedy také hybnosti a energie molekul. Jako důsledek neuspořádaného pohybu molekul probíhají vzájemné srážky v libovolných místech objemu, ale vrstvý model definuje třetí zjednodušující předpoklad chování plynu :

- 3) Molekuly se vzájemně srážejí pouze v rovinách, které jsou vzdálené o střední volnou dráhu, tedy v našem případě se jedná o roviny na souřadnicích x -ové osy : $\dots, x_0 - \bar{l}, x_0, x_0 + \bar{l}, \dots$, a ve vrstvách mezi těmito rovinami se molekuly pohybují zcela beze srážek střední rychlostí \bar{v} ,

Tento předpoklad umožní přiřadit všem dopadajícím molekulám jedinou hodnotu koncentraci :

Z levé strany dopadají na plochu S molekuly, které pocházejí z míst $(x_0 - \bar{l})$, kde je koncentrace difundujících molekul :

$$n(x_0 - \bar{l})$$

Počet molekul dopadajících za jednotku času zleva na plochu S – tj. proud molekul z levé strany na plochu S můžeme proto vyjádřit pomocí částicového deště jako :

$$J_1 = \frac{1}{4} \cdot n(x_0 - \bar{l}) \cdot \bar{v} \cdot S$$

Analogicky z pravé strany dopadá na plochu S proud molekul :

$$J_2 = \frac{1}{4} \cdot n(x_0 + \bar{l}) \cdot \bar{v} \cdot S < J_1.$$

Celkový proud molekul přes plochu S - **difúzní proud**, směřující zleva doprava – bude dán jejich rozdílem (současně upravíme vytknutím, vynásobením a vydělením stejným výrazem) :

$$J_{dif} = J_1 - J_2 = \frac{1}{4} \cdot (n(x_0 - \bar{l}) - n(x_0 + \bar{l})) \cdot \bar{v} S \cdot \left(\frac{2\bar{l}}{2\bar{l}} \right)$$

V závorce vznikl rozdíl koncentrací, který můžeme vyjádřit diferenciálním přírůstkem koncentrace molekul ve směru osy x (přírůstek je záporný) :

$$(n(x_0 - \bar{l}) - n(x_0 + \bar{l})) = -dn$$

Tento přírůstek vzniká mezi místy vzdálenými na x -ové ose o délku:

$$dx = 2\bar{l}$$

Po dosazení tak dostaneme výraz :

$$J_{dif} = -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{dn}{dx} \right) \cdot \bar{v} S \cdot 2\bar{l} = -\frac{1}{2} \bar{l} \bar{v} \cdot \left(\frac{dn}{dx} \right) \cdot S$$

Jestliže označíme konstanty plynu:

$$D = \frac{1}{2} \bar{l} \bar{v} \quad \text{koeficient difúze}$$

Dostáváme základní zákon difúze :

$$J_{dif} = -D \cdot \left(\frac{dn}{dx} \right) \cdot S \quad \text{1. Fickův zákon}$$

Po vydělení plochou S vznikne vztah pro plošnou **hustotu difúzního proudu** (skalár) :

$$j_{dif} = -D \cdot \left(\frac{dn}{dx} \right)$$

Vektorový zápis pro třírozměrný případ difúze by vznikl zobecněním na další souřadné osy y a z .

Protože jsou všechny osy rovnocenné, dostali bychom stejné výrazy, jen s derivacemi podle y a z a byly by to souřadnice výsledného vektoru proudové hustoty :

$$\vec{j}_{dif} = -D \cdot \text{grad } n \quad \text{plošná hustota difúzního proudu (vektor)}$$

Přestože vrstvý model plynu, s jehož pomocí jsme stanovili difúzní proud, se zdá být velmi primitivní, výsledný vztah je kvalitativně dokonalý a velmi složitý přesný výpočet vede pouze k jediné korekci - ve vztahu pro difúzní koeficient bude $\frac{1}{3}$ místo $\frac{1}{2}$.

Se započtením této změny dosadíme do difúzního koeficientu známé vztahy a upravíme pro daný plyn, koncentraci a konstantní teplotu :

$$D = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{l}{n4\sqrt{2}\sigma_{\infty} \left(1 + \frac{T_d}{T}\right)} \right) \cdot \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \text{konst} \cdot \sqrt{\frac{l}{m}}$$

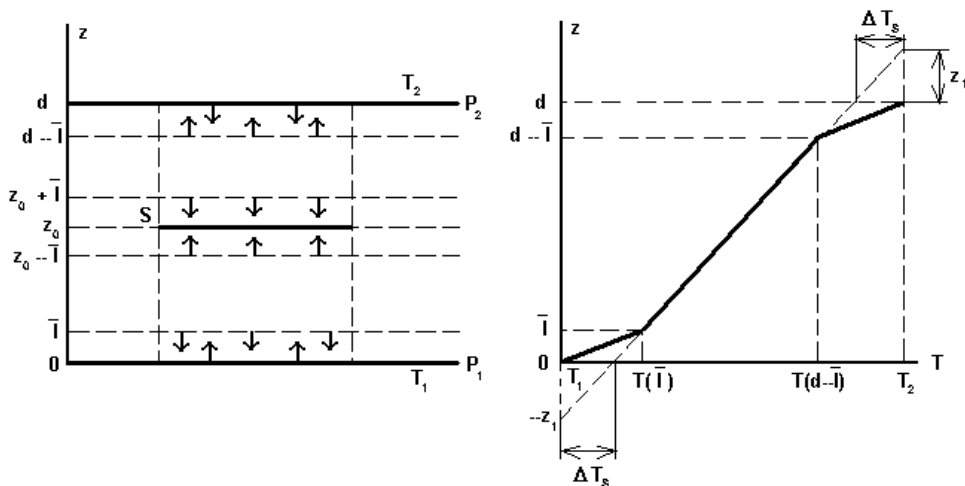
Difúzní koeficient a tedy i difúzní tok při daném gradientu koncentrace klesá s rostoucí hmotností molekul m - nejlépe tedy difundují nejlehčí plyny H_2 a He , což dobře osvětluje užití helia při hledání netěsností ve stěnách vakuových aparatur.

Pozn.: **2. Fickův zákon** stanoví časovou změnu koncentrace v neustáleném stavu (je úměrná prostorové změně gradientu koncentrace) :

$$\frac{dn}{dt} = D \cdot \frac{d^2n}{dx^2}$$

3. Tepelná vodivost plynu (přenos tepla)

Tento jev nastane v případě, že části vakuového systému mají různé teploty.



Zkoumejme dvě rovnoběžné plochy P_1 a P_2 o teplotách T_1 a T_2 , ve vzdálenosti d a $T_1 < T_2$. Molekuly plynu mezi těmito plochami se ohřívají od teplejší plochy P_2 a ochlazují se od chladnější plochy P_1 a teplota plynu tedy zřejmě stoupá od teploty T_1 k teplotě T_2 a je funkcí souřadnice z : $T = T(z)$.

Sledujeme plochu S kolmou na osu z v místě z_0 a použijeme vrstvý model plynu:

- molekuly, které na S dopadají shora, proletěly dráhu \bar{l} a pocházejí tedy z místa $(z_0 + \bar{l})$,
- v tomto místě má plyn teplotu $T(z_0 + \bar{l})$ a molekuly tedy mají energii: $\frac{3}{2}kT(z_0 + \bar{l})$,
- tedy shora na plochu S dopadne za 1 času počet částic: $\frac{1}{4}n\bar{v}S$ a každá z nich má energii:

$$\frac{3}{2}kT(z_0 + \bar{l})$$

Potom celková energie, kterou tyto molekuly nesou, má hodnotu:

$$\frac{1}{4}n\bar{v}S \frac{3}{2}kT(z_0 + \bar{l})$$

Analogicky molekuly dopadající na S zdola nesou menší energii:

$$\frac{1}{4}n\bar{v}S \frac{3}{2}kT(z_0 - \bar{l})$$

Celkem tedy přes plochu S teče shora dolů tok (proud) energie, tj. **tepelný tok** (současně vynásobíme a vydělíme stejným číslem):

$$Q_v = \frac{1}{4}n\bar{v}S \frac{3}{2}k [T(z_0 + \bar{l}) - T(z_0 - \bar{l})] \cdot \left(\frac{2\bar{l}}{2\bar{l}} \right)$$

Analogicky jako u difuzního proudu označíme **teplotní spád (gradient)** (index v znamená vnitřní):

$$\left(\frac{dT}{dz} \right)_v = [T(z_0 + \bar{l}) - T(z_0 - \bar{l})] \left(\frac{1}{2\bar{l}} \right)$$

A zbývající konstanty označíme:

$$\lambda_v = \frac{1}{4}n\bar{v} \frac{3}{2}k 2\bar{l} = \frac{3}{4}n\bar{v}k\bar{l}$$

koeficient tepelné vodivosti (vnitřní).

Potom dostáváme pro tepelný tok jednoduchý vztah:

$$Q_v = \lambda_v S \cdot \left(\frac{dT}{dz} \right)_v$$

Můžeme také vyjádřit plošnou hustotu tepelného toku

$$j_Q = \lambda_v \left(\frac{dT}{dz} \right)$$

V prostorovém případě bude plošná hustota opět vektor:

$$\vec{j}_Q = \lambda_v \cdot \text{grad } T \quad \text{plošná hustota tepelného toku (vektor)}$$

Tento tepelný tok musí být zřejmě stejný v každém místě z pro stejné plochy S (zákon zachování energie) :

$$Q_v = \text{konst.}$$

Z toho ovšem plyne:

$$\left(\frac{dT}{dz} \right)_v = \text{konst.}$$

Tedy teplota je uvnitř plynu lineární funkcí souřadnice z .

Stejný tok energie teče ale také na spodní plochu P_1 (a z horní plochy P_2) - konkrétně: na P_1 dopadají molekuly z místa poslední srážky, tj. z vrstvy $z = \bar{l}$, tyto molekuly mají teplotu $T(\bar{l})$ a z plochy P_1 ovšem letí zpátky nahoru odražené molekuly.

Uvažme ale : kdyby tyto molekuly byly jen pružně odražené, měly by stejnou rychlost jako molekuly dopadající – tedy také stejnou teplotu $T(\bar{l})$ a stejnou energii – pak by se na plochu P_1 ale nemohlo předávat žádné teplo!

Odraz molekul od plochy P_1 tedy musí být nepružný, molekuly při něm předají ploše P_1 přebytečnou energii, tím se ochladí z teploty $T(\bar{l})$ na teplotu T_1 .

Pak energie předaná na plochu P_1 by byla :

$$\frac{1}{4} n \bar{v} S \frac{3}{2} k (T(\bar{l}) - T_1).$$

Ale proces odrazu (ochlazování) molekul je jistě náhodný - některé molekuly se mohou odrazit pružně, jiné se ochladí jen částečně (předají jen část energie).

Nechť N_{celk} je celkový počet molekul dopadlých na plochu. Dále označme N_{ak} počet molekul, které se při nepružném odrazu ochladily na teplotu plochy (dokonale se akomodovaly, přizpůsobily se) a zbytek molekul ($N_{celk} - N_{ak}$) se odrazil pružně.

Pak definujeme veličinu **koeficient akomodace** (*pravděpodobnost akomodace energie*) jako poměrné zastoupení akomodovaných molekul:

$$\alpha_E = \frac{N_{ak}}{N_{celk}}$$

Velikost tohoto koeficientu závisí na druhu plynu a materiálu a stavu plochy. Obecně jistě platí :

$$0 < \alpha_E < 1$$

například:

- N_2 na čisté Pt $\alpha_E = 0,77$;
- O_2 na čisté Pt $\alpha_E = 0,79$;
- H_2 na čisté Pt $\alpha_E = 0,29$.

Pokračujme ve výpočtu : tedy pouze část molekul α_E předá svoji energii ploše P_1 , tj. tepelný tok na P_1 bude:

$$Q_{P_1} = \alpha_E \frac{1}{4} n \bar{v} S \frac{3}{2} k (T(\bar{l}) - T_1).$$

Analogicky z plochy P_2 odtéká energie (koeficient α_E na této ploše by mohl být jiný):

$$Q_{P_2} = \alpha_E \frac{1}{4} n \bar{v} S \frac{3}{2} k (T_2 - T(d - \bar{l}))$$

Porovnejme tyto tepelné toky s tokem Q_v , například :

$$Q_{P_1} = Q_v$$

Dosadíme:

$$\alpha_E \frac{1}{4} n \bar{v} S \frac{3}{2} k (T(\bar{l}) - T_1) = \frac{1}{4} n \bar{v} S \frac{3}{2} k 2\bar{l} \left(\frac{dT}{dz} \right)_v.$$

Zkrátíme a dostáváme:

$$T(\bar{l}) - T_1 = \frac{2\bar{l}}{\alpha_E} \left(\frac{dT}{dz} \right)_v. \quad (1)$$

Stejným způsobem dostaneme z rovnosti $Q_{P_2} = Q_v$:

$$T_2 - T(d - \bar{l}) = \frac{2\bar{l}}{\alpha_E} \left(\frac{dT}{dz} \right)_v. \quad (2)$$

A ještě jednu rovnici získáme vyjádřením lineární závislosti teploty $T(z)$, která platí uvnitř plynu – tedy v mezích $T(\bar{l})$ až $T(d - \bar{l})$:

$$\left(\frac{dT}{dz} \right)_v = \frac{T(d - \bar{l}) - T(\bar{l})}{d - 2\bar{l}}. \quad (3)$$

Máme tak 3 rovnice o třech neznámých: $\left(\frac{dT}{dz} \right)_v$, $T(\bar{l})$ a $T(d - \bar{l})$.

Pokuste se je vyřešit za domácí cvičení, výsledky by měli být :

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_v = \frac{T_2 - T_1}{d + 2\bar{l}\left(\frac{2}{\alpha_E} - 1\right)}$$

$$T(\bar{l}) = T_1 + \frac{2\bar{l}}{\alpha_E} \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{d + 2\bar{l}\left(\frac{2}{\alpha_E} - 1\right)}\right) \quad T(d - \bar{l}) = T_2 - \frac{2\bar{l}}{\alpha_E} \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{d + 2\bar{l}\left(\frac{2}{\alpha_E} - 1\right)}\right)$$

Dále je možno znázornit rovnici přímkou:

$$T = T(z)$$

Podle horního obrázku: přímka začíná na ose z v bodě $z = -z_1$ a končí v bodě $z = d + z_1 = d + \left(\frac{2 - \alpha_E}{\alpha_E}\right) \cdot \bar{l}$, teplotní skok v místě ploch: $\Delta T_s = \left(\frac{2 - \alpha_E}{\alpha_E}\right) \cdot \bar{l} \cdot \left(\frac{dT}{dz}\right)_v$.

Upravme dále formálně vztah pro **teplotní spád** uvnitř plynu :

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_v = \frac{T_2 - T_1}{d + 2\bar{l}\left(\frac{2}{\alpha_E} - 1\right)} = \left(\frac{T_2 - T_1}{d}\right) \cdot \left(\frac{d}{d + 2\bar{l}\left(\frac{2}{\alpha_E} - 1\right)}\right) = \left(\frac{T_2 - T_1}{d}\right) \cdot G_E$$

kde jsme označili:

$$G_E = \frac{d}{d + 2\bar{l}\left(\frac{2}{\alpha_E} - 1\right)} \quad \text{faktor posuvu (skluzu)}$$

Dosaďme do vztahu pro tepelný tok:

$$Q = Q_v = Q_{P_1} = Q_{P_2} = \lambda_v S \cdot \left(\frac{dT}{dz}\right)_v = \lambda_v S \cdot G_E \left(\frac{T_2 - T_1}{d}\right)$$

Jestliže nakonec zavedeme :

$$\lambda = \lambda_v \cdot G_E \quad \text{koeficient tepelné vodivosti (výsledný, vnější)}$$

Pak bude pro teplo přenášené z plochy P_2 na plochu P_1 platit vztah :

$$Q = \lambda \cdot S \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right)$$

výsledný tepelný tok

Pozn.: zlomek $\left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right)$ můžeme chápat jako **vnější gradient teploty**

Oprávněnost a efektivnost vrstvého modelu opět dokládá fakt, že přesný výpočet přenosu tepla pouze změní ve výrazu pro λ_v konstantu $\frac{3}{4}$ na 0,83 .

Rozlišme nyní dva mezní případy:

1. vysoké tlaky - viskózní podmínky, kdy $\bar{l} \ll d$, optimálně aby platilo $2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_E} - 1 \right) \ll d$

Pak zřejmě:

$$G_E = \frac{d}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_E} - 1 \right)} \cong 1$$

A vnější koeficient tepelné vodivosti bude :

$$\lambda = \lambda_v \cdot G_E = \lambda_v = \frac{3}{4} n \bar{v} k \bar{l}$$

Dosadíme za n :

$$\lambda = \frac{3}{4} \cdot \frac{p}{kT} \cdot \bar{v} k \bar{l} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\bar{v}}{T} \cdot p \cdot \bar{l}$$

Protože součin $p \cdot \bar{l}$ nezávisí na tlaku (viz dříve) – pak ani koeficient tepelné vodivosti a rovněž tepelný tok Q nemůže na tlaku záviset (jen na teplotě a druhu plynu), při vysokých tlacích bude tedy konstantní.

2. nízké tlaky - molekulární podmínky, kdy $\bar{l} \gg d$ aby platilo $2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_E} - 1 \right) \gg d$.

Pak bude:

$$\lambda = \lambda_v \cdot G_E = \frac{1}{4} n \bar{v} \cdot \frac{3}{2} k \cdot 2\bar{l} \cdot \frac{d}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_E} - 1 \right)} =$$

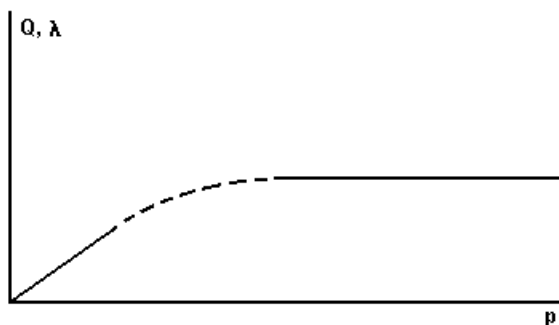
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{kT} \cdot \bar{v} \cdot \frac{3}{2} k \cdot 2 \cdot \frac{d}{2 \cdot \left(\frac{2 - \alpha_E}{\alpha_E} \right)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\bar{v}}{T} \cdot \left(\frac{\alpha_E}{2 - \alpha_E} \right) \cdot d \cdot p$$

Koeficient tepelné vodivosti závisí na teplotě a druhu plynu a je přímo úměrný tlaku a vzdálenosti ploch, analogicky dostaneme po dosazení do tepelného toku :

$$Q = \lambda \cdot S \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{\bar{v}}{T} \cdot \left(\frac{\alpha_E}{2 - \alpha_E} \right) \cdot d \cdot p \cdot S \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right)$$

Tepelný tok tedy je také **přímo úměrný tlaku** a navíc vidíme, že se vykrátí vzdálenost ploch d – tj. tepelný tok **nezávisí na vzdálenosti ploch**. To je ovšem pochopitelné, neboť za nízkého tlaku se molekuly vzájemně prakticky nesrážejí, pouze vylétují z jedné plochy a dopadají na druhou plochu.

Graficky: celková závislost na tlaku



Technické aplikace využívají nalezených závislostí pro nízké tlaky:

$$Q \approx p \bar{v} \approx p \cdot \sqrt{\frac{l}{m}}$$

- 1) tepelné vakuometry
- 2) tepelná izolace (vyžaduje nízký tlak, těžký plyn)

4. Tření plynu

Je analogické jevu vedení tepla, ale místo energie se přenáší impuls (hybnost).

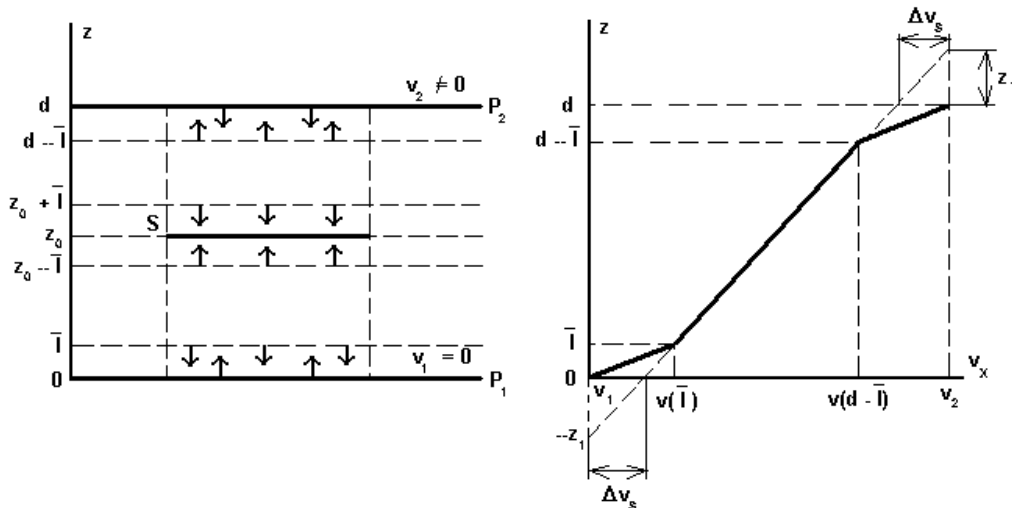
Zkoumejme opět dvě rovnoběžné plochy:

- P_1 pohybuje se rychlostí $v_1 (= 0)$ ve směru osy x ,
- P_2 pohybuje se rychlostí $v_2 (\neq 0)$ ve směru osy x .

Molekuly plynu mezi plochami získávají ve srážkách s plochou P_2 **přídavnou (driftovou, unášivou)** rychlost v ve směru osy x , (a hybnost mv), a ve vzájemných srážkách si ji pak dále předávají, v se proto mění od $v_1 = 0$ do v_2 v závislosti na souřadnici z :

$$v = v(z).$$

Použijeme stejný vrstvý model jako u vedení tepla - plyn je rozdělen do vrstviček vzdálených o střední volnou dráhu \bar{l} , v nich se pohybují molekuly beze srážek, srážky se konají pouze na hraničních plochách.



Počítají se opět toky molekul plochou S v libovolném místě z_0 :

- molekuly dopadající shora pocházejí z místa $(z_0 + \bar{l})$ a mají tedy přídavnou hybnost $m \cdot v(z_0 + \bar{l})$,
- molekuly dopadající zdola mají hybnost $mv \cdot (z_0 - \bar{l})$.

Plochou S tedy za 1 času prochází tok hybnosti:

$$I_v = \frac{1}{4} n \bar{v} S m \cdot (v(z_0 + \bar{l}) - v(z_0 - \bar{l})) \cdot \left(\frac{2\bar{l}}{2\bar{l}} \right).$$

Analogicky s tepelným tokem označíme jako **vnitřní spád (gradient) unášivé rychlosti**:

$$\left(\frac{dv}{dz} \right)_v = (v(z_0 + \bar{l}) - v(z_0 - \bar{l})) \cdot \left(\frac{1}{2\bar{l}} \right)$$

A zbývající veličiny a konstanty vytvoří:

$$\eta_v = \frac{1}{4} n \bar{v} m \cdot 2\bar{l} = \frac{1}{2} n \bar{v} m \bar{l}$$

koeficient dynamické viskozity (vnitřní)

(také **koeficient vnitřního tření**)

Potom dostáváme pro tok hybnosti jednoduchý vztah, analogický tepelnému toku. Uvažme ještě, že tok hybnost znamená současně změnu hybnosti (za 1 času) molekul srážejících se na okrajových plochách vrstev (tj. mezi jednotlivými vrstvami plynu) – tato změna je ale podle 2. Newtonova zákona rovna síle působící na molekuly na těchto plochách – a je to celková síla působící na plochách S v jejich tečném směru (osy x) - tedy to je **třecí síla** :

$$F_t = I_v = \eta_v S \cdot \left(\frac{dv}{dz} \right)_v \quad \text{třecí síla (mezi vrstvami plynu)}$$

Pozn. : Vrstvový model plynu je vlastně nejnázornějším modelem pro popis tohoto jevu vnitřního tření, protože v analogii s klasickou mechanikou si každý lehce představí vrstvu plynu jako těleso, které se pohybuje po hraniční ploše S druhé vrstvy, za působení tečné třecí síly.

Tok hybnosti musí být opět stejný v každé výšce z (zákon zachování hybnosti) :

$$\left(\frac{dv}{dz} \right)_v = konst.$$

A teče i na plochu P_1 :

- na plochu P_1 dopadají molekuly o hybnosti $mv(\bar{l})$,
- a z P_1 vyletují molekuly s hybností $mv_1 = 0$, ale (analogie s vedením tepla) - jen jejich určitá relativní část α_p - **akomodační koeficient hybnosti**.

Tedy tok hybnosti na P_1 :

$$I_{P_1} = \alpha_p \cdot \frac{1}{4} n \bar{v} S m \cdot (v(\bar{l}) - 0)$$

a podobně pro tok z P_2 :

$$I_{P_2} = \alpha_p \frac{1}{4} n \bar{v} S m (v_2 - v(d - \bar{l})).$$

Z rovností:

$$I_{P_1} = I_{P_2} = I_v$$

plynou dvě rovnice:

$$\alpha_p \frac{1}{4} n \bar{v} S m v(\bar{l}) = \frac{1}{2} n \bar{v} m \bar{l} S \left(\frac{dv}{dz} \right)_v \Rightarrow v(\bar{l}) = \frac{2\bar{l}}{\alpha_p} \left(\frac{dv}{dz} \right)_v$$

A obdobně dostaneme :

$$v_2 - v(d - \bar{l}) = \frac{2\bar{l}}{\alpha_p} \left(\frac{dv}{dz} \right)_v$$

Třetí rovnice vznikne výpočtem spádu unášivé rychlosti uvnitř plynu:

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)_v = \frac{v(d-\bar{l}) - v(\bar{l})}{d-2\bar{l}}$$

Opět tedy dostáváme tři rovnice pro tři neznámé: $\left(\frac{dv}{dz}\right)_v$, $v(\bar{l})$ a $v(d-\bar{l})$.

Řešení jsou obdobná :

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)_v = \frac{v_2 - v_1}{d + 2\bar{l}\left(\frac{2}{\alpha_p} - 1\right)} \quad \dots\dots\dots \text{atd.}$$

Přímka $v = v(z)$ má stejný průběh jako u vedení tepla:

- začíná na ose z v bodě $-z_1 = -z_1$
- v místě ploch je rychlostní skok $\Delta v = \left(\frac{2-\alpha_p}{\alpha_p}\right) \cdot \bar{l} \cdot \left(\frac{dv}{dz}\right)_v$

Řešení pro spád unášivé rychlost upravme stejně jako pro teplotní spád :

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)_v = \frac{v_2 - v_1}{d + 2\bar{l}\left(\frac{2}{\alpha_p} - 1\right)} = \frac{d}{d + 2\bar{l}\left(\frac{2}{\alpha_p} - 1\right)} \cdot \left(\frac{v_2 - v_1}{d}\right) = G_p \cdot \left(\frac{v_2 - v_1}{d}\right)$$

kde jsme opět označili:

$$G_p = \frac{d}{d + 2\bar{l}\left(\frac{2}{\alpha_p} - 1\right)} \quad \text{faktor posuvu (skluzu)}$$

Dosaďme do vztahu pro tepelný tok:

$$F_t = I_{P_1} = I_{P_2} = I_v = \eta_v S \cdot \left(\frac{dv}{dz}\right)_v = \eta_v S G_p \cdot \left(\frac{v_2 - v_1}{d}\right)$$

Jestliže nakonec zavedeme :

$$\eta = \eta_v G_p \quad \text{koeficient dynamické viskozity (tření) (vnější, výsledný).}$$

Pak bude pro tok hybnosti přenášený z plochy P_2 na plochu P_1 - tedy pro třecí sílu působící na vrstvičky plynu a také na plochy P_1 a P_2 - platit jednoduchý vztah :

$$F_t = \eta S \cdot \left(\frac{v_2 - v_1}{d} \right) \quad \text{třecí síla}$$

Opět lze rozlišit 2 případy:

1. vysoké tlaky - viskózní podmínky, kdy $\bar{l} \ll d$ aby $\left(2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_p} - 1 \right) \right) \ll d$.

Pak zřejmě:

$$G_p = \frac{d}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_p} - 1 \right)} \cong 1$$

Tedy bude:

$$\eta = \eta_v = \frac{1}{2} n \bar{v} m \bar{l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{kT} \bar{v} m \bar{l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{v} m}{kT} \cdot p \bar{l}$$

A potom η i F_t **nezávisí na tlaku**, pouze na teplotě a druhu plynu.

Pozn.: Za vyšších tlaků existuje v objemu plynu spojitá funkce gradientu unášivé rychlosti $\left(\frac{dv}{dz} \right)$, jde tedy o typický jev tření uvnitř plynu - tzv. **vnitřní tření**.

2. nízké tlaky - molekulární podmínky, kdy $\bar{l} \gg d$ aby $\left(2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_p} - 1 \right) \right) \gg d$.

Pak:

$$\begin{aligned} \eta = \eta_v G_p &= \frac{1}{2} n \bar{v} m \bar{l} \frac{d}{d + 2\bar{l} \left(\frac{2}{\alpha_p} - 1 \right)} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{p}{kT} \bar{v} m \left(\frac{\alpha_p}{2 - \alpha_p} \right) d = \frac{\bar{v} m}{4kT} \left(\frac{\alpha_p}{2 - \alpha_p} \right) \cdot d \cdot p \end{aligned}$$

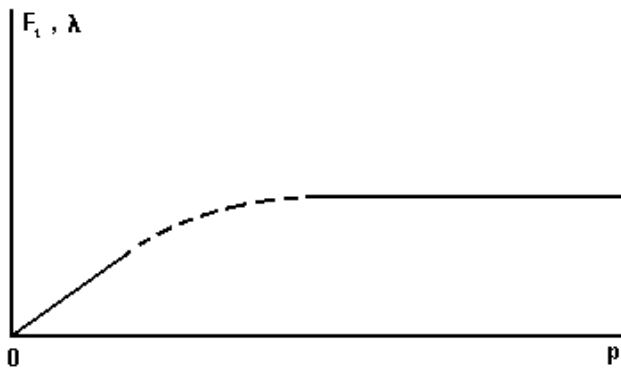
Tedy η závisí na teplotě a druhu plynu a je přímo úměrný tlaku a vzdálenosti ploch, analogicky dostaneme po dosazení do třecí síly :

$$F_t = \eta S \cdot \left(\frac{v_2 - v_1}{d} \right) = \frac{\bar{v}m}{4kT} \left(\frac{\alpha_p}{2 - \alpha_p} \right) \cdot d \cdot p \cdot S \left(\frac{v_2 - v_1}{d} \right)$$

Třecí síla tedy je také **přímo úměrná tlaku** a navíc opět vidíme, že se vykrátí vzdálenost ploch d – tj. **nezávisí na vzdálenosti ploch**. To je opět pochopitelné, neboť za nízkého tlaku se molekuly vzájemně prakticky nesrážejí, pouze vyletují z P_1 a dopadají na P_2 a opačně.

Pozn.: Za nízkých tlaků neexistuje v plynu spojitá funkce gradientu unášivé rychlosti $\left(\frac{dv}{dz} \right)$
jde o tzv. **vnější tření**.

Graficky : celková závislost na tlaku:



Technické aplikace využívají nalezených závislostí pro nízké tlaky:

$$F_t \approx p$$

- 1) tepelné vakuometry