Proudění plynu potrubím

Zatím jsme poznali objemové procesy jako fyzikální jevy, při kterých nastává přenos hmoty, případně energie či impulsu v prostoru (objemu) vyplněném plynem. Tyto jevy jsou principiálně založené na neuspořádaném pohybu velkého počtu částic plynu a z hlediska termodynamiky mohou dobře charakterizovat nevratné přirozené procesy, pokud by přiváděly plyn do rovnovážného stavu.

Při studiu jevu difuze jsme počítali proud jednoho druhu molekul, přimísených do jiného plynu, a zjistili jsme, že je způsoben prostorovým spádem koncentrace těchto molekul, tedy rozdílnými koncentracemi na různých místech v prostoru.

Stejně tak jistě vznikne proud molekul i v jednosložkovém plynu mezi místy různé koncentrace tohoto plynu, tedy mezi místy různých tlaků (například je do nějakého místa přidán plyn). Při tomto proudění se budou tlakové rozdíly postupně vyrovnávat, až po určité době nastane rovnovážný stav.

Při proudění plynu potrubím v technických aplikacích je ovšem tlakový rozdíl mezi počátkem a koncem potrubí uměle udržován činností nějakého stroje (vývěva, kompresor) a rovnovážný stav nenastane.

Uveďme nejprve obecnější definici proudu plynu:
Stejně jako u elektrického proudu je nutno stanovit nejprve plochu S (libovolnou spojitou) a dále množství plynu dM prošlé touto plochou v určitém smyslu (směru) za čas dt. Pak proud plynu definujeme jako ***množství plynu prošlé touto plochou S za jednotku času*** :

$$\boxed{q_m = \frac{dM}{dt}} \qquad \textbf{\textit{proud plynu}}$$

Pojem „množství plynu“ je velmi obecný – můžeme ho charakterizovat buď hmotou plynu m, látkovým množstvím ν, počtem částic N, objemem V, nebo i součinem pV .

Tomu pak odpovídají veličiny:

$$q_m = \frac{dm}{dt} \qquad [\,kg.s^{-1}] \qquad \textbf{\textit{hmotnostní proud plynu}}$$

$$q_\nu = \frac{d\nu}{dt} \qquad [\,mol.s^{-1}] \qquad \textbf{\textit{proud látkového množství}}$$

$$q_N = \frac{dN}{dt} \qquad [\,s^{-1}] \qquad \textbf{\textit{částicový proud}}$$

$$q_V = \frac{dV}{dt} \qquad [\,m^3.s^{-1}] \qquad \textbf{\textit{objemový proud}}$$

a nejčastěji se užívá :

$$\boxed{q_{pV} = \frac{d(\,pV\,)}{dt}} \qquad [\,Pa.\,m^3.s^{-1}] \qquad \textbf{\textit{pV-proud plynu}}$$

Využitím stavové rovnice lze jednoduše najít libovolné převodní vztahy, například :

$$q_{pV} = \frac{d(pV)}{dt} = p\left(\frac{dV}{dt}\right) = p \cdot q_V$$

$$q_{pV} = \frac{d(pV)}{dt} = \frac{d(\nu RT)}{dt} = RT\left(\frac{d\nu}{dt}\right) = RT \cdot q_\nu$$

$$q_N = \frac{dN}{dt} = \frac{d(nV)}{dt} = n\left(\frac{dV}{dt}\right) = n \cdot q_V$$

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \frac{d(\nu M_{mol})}{dt} = M_{mol}\left(\frac{d\nu}{dt}\right) = M_{mol} \cdot q_\nu$$

Zábavné jednotky (Fun with the units)

<u>Objemový proud plynu :</u>

1 $l.s^{-1}$

1 $m^3.hod^{-1}$

1 *cumec* = 1 *cubic* meter *per second*

1 *cfs* = 1 *cubic* feet *per second* 1 *cfs* = 28,3169 $l.s^{-1}$

1 *cusec* = 1 *cubic* feet *per second*

1 *cfm* = 1 *cubic* feet *per minute* 1 *cfm* = 28,3169 $l.min^{-1}$

1 *cfh* = 1 *cubic* feet *per hour*

1 *lps* = 1 *liter per second*

<u>*pV- proud* plynu :</u>

1 $Pa.l.s^{-1}$

1 $Pa.cm^3.s^{-1}$

1 $mbar.l.s^{-1}$

1 *sccm* = 1 *standard cubic centimeters per minute* (standardní kubický centimetr za minutu)

Je to zdánlivě objemový proud plynu ale při definovaném standardním tlaku (1 *atm* = 101325 *Pa*) a při standardní teplotě (20 ºC, nebo 0 ºC), je to tedy ve skutečnosti pV- proud a lze ho jednoduše převést v případě potřeby na vhodné jiné jednotky, např. :

1 *sccm* = *1,68875* $Pa.l.s^{-1}$

1 *scfm* = 1 *standard cubic* feet *per minute*

1 *scfh* = 1 *standard cubic* feet *per hour*

1 *scim* = 1 *standard cubic* inches *per minute*

1 lusec = 1 *liter per second at a pressure of one micrometer of mercury (micron)*

$$1\ lusec = 1\ l.\mu mHg.s^{-1} = 1\ l.\mu.s^{-1} = 1\ l.u.s^{-1} = 133{,}3\ Pa.cm^3.s^{-1}$$

Při proudění plynu mají molekuly přídavnou rychlost ve směru pohybu proudu (rovnou rychlosti proudění u) a protože je plyn obklopen nehybnými stěnami potrubí, musí docházet k přenosu impulzu - podle výsledků z minulé kapitoly tedy v plynu existuje tření . Lze rozlišit dva nejdůležitější případy:

1) ***proudění viskózní (laminární)***

$$\bar{l} << d \ldots\ldots \text{ vyšší tlaky} \ldots\ldots\ldots \text{ ex. spoj. funkce } \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right) \ldots\ldots\ldots \text{ vnitřní tření}$$

2) ***proudění molekulární***

$$\bar{l} >> d \ldots\ldots\ldots \text{nižší tlaky } \ldots\ldots\ldots \text{ neex. spoj. funkce } \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right) \ldots\ldots\ldots \text{vnější tření}$$

Obecný popis proudění vyžaduje dosti obtížný matematický aparát, odvodíme proto pouze jednoduché vztahy pro nejběžnější potrubí - **trubice kruhového průřezu o poloměru** r **a délky** l (a případně pro krátkou trubici – otvor):

1. viskózní proudění ($\bar{l} << d$)

Plyn se podobá spojitému prostředí, molekuly se mnohokrát vzájemně srazí a změní svoji hybnost, než dopadnou na stěnu trubice (vnitřní tření plynu). Pro popis pohybu plynu v trubicí můžeme použít vrstvový model plynu a představit si , že se plyn pohybuje v určitých vrstvách přídavnou unášivou rychlostí ve směru proudu plynu. V důsledku třecích sil bude zřejmě největší rychlost u plynu v ose trubice; rychlost u stěn trubice bude minimální. Jelikož je proud plynu ve válcové trubici válcově symetrický, mají vrstvy plynu pohybující se stejnou rychlostí tvar válcových tenkostěnných trubic.

Zavedeme osu x ve směru poloměru trubky, s počátkem na ose trubice. Na plochu podstavy jedné takové vrstvy o poloměru x a tloušťce dx působí síla přímo úměrná ploše podstavy a rozdílu tlaků na počátku a konci potrubí :

$$F = 2\pi x\cdot dx\cdot\left(p_1 - p_2\right)$$

Dále musíme určit síly tření, mezi naší vrstvou a oběma sousedními, tj. vnitřní a vnější vrstvou. Použijeme výsledky minulé kapitoly, že třecí síla je přímo úměrná ploše vrstvy, koeficientu dynamické viskozity (píšeme bez indexu) a gradientu unášivé rychlosti, který je kolmý na rovinu plochy vrstvy a směřuje do osy trubky. Síla tření na ploše naší vrstvy přilehlé k vnitřní sousední vrstvě tak bude :

$$F_1 = -2\pi x l\eta\frac{du}{dx}$$

(unášivá rychlost u klesá s rostoucím x)

Tato síla urychluje naši vrstvu a brzdí vnitřní sousední plochu, která se pohybuje rychleji. Analogicky síla tření působící na ploše naší vrstvy přilehlé ke vnější sousední vrstvě je :

$$F_2 = -2\pi l\eta(x + dx)\cdot\left(\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2}dx\right).$$

Tato síla brzdí naši vrstvu a urychluje pomaleji se pohybující vnější sousední vrstvu. Urychlující a brzdící síly musí být za ustáleného proudění v rovnováze :

$$f + F_1 - F_2 = 0$$

Po dosazení .

$$2\pi\cdot\left\{xdx\left(p_1 - p_2\right) - xl\eta\frac{du}{dx} \ + \ l\eta\left(x + dx\right)\cdot\left(\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2}dx\right)\right\} \ = \ 0.$$

Po vydělení 2π , po roznásobení, zanedbání členu s dx^2 a po vydělení dx dostaneme :

$$\eta l\frac{du}{dx} + \eta l x\frac{d^2u}{dx^2} = -x\left(p_1 - p_2\right)$$

Levou stranu můžeme upravit do tvaru :

$$\eta l\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) = -x\left(p_1 - p_2\right)$$

Po vydělení konstantami můžeme integrovat :

$$x\frac{du}{dx} = -\frac{x^2}{2\eta l}\left(p_1 - p_2\right) + C_1$$

Integrační konstanta je zřejmě nulová (proč ?), pak po vydělení x dostaneme :

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x\left(p_1 - p_2\right)}{2\eta l}$$

Provedeme druhou integraci :

$$u = -\frac{x^2(p_1 - p_2)}{4\eta\, l} + C_2 .$$

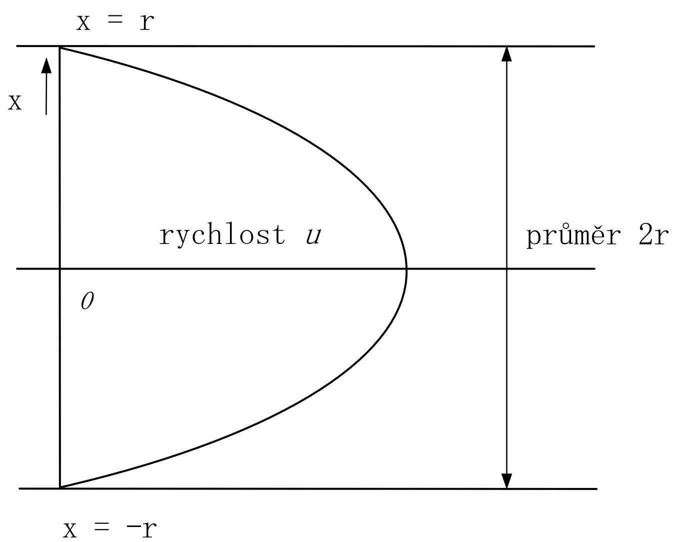
Při stěně trubice je rychlost proudící kapaliny velmi malá, položíme ji přímo rovnou nule, potom :

$$C_2 = \frac{r^2(p_1 - p_2)}{4\eta\, l} .$$

Dosazením získáme konečný výraz pro unášivou rychlost plynu – tedy rychlost proudění :

$$\boxed{u = \frac{p_1 - p_2}{4\eta\, l} \cdot \left(r^2 - x^2\right)}$$

Vidíme, že jde o kvadratickou závislost na vzdálenosti *x* od osy trubice, a je to parabola s vrcholem v ose trubky (viz obr.) :



Objem plynu, který projde průřezem trubky za jednotku času (objemový proud), vypočítáme integrací součinu rychlosti plynu a příslušné plochy vrstvy plynu :

$$q_V = \int_0^r u 2\pi x . dx = \int_0^r \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}\left(r^2 - x^2\right) 2\pi x dx = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} \cdot 2\pi \cdot \int_0^r \left(r^2 - x^2\right) x dx$$

Po integraci dostaneme .

$$\boxed{q_V = \frac{\pi r^4}{8\eta l}(p_1 - p_2)}$$

Hagen-Poiseulův zákon

Pro určení pV-proudu musíme ještě získaný výraz vynásobit tlakem, který se ovšem v trubce spojitě mění od hodnoty p_1 na vstupu do hodnoty p_2 na výstupu. Zřejmě nejjednodušší možností bude použít střední hodnotu tlaku v trubici, kterou vypočteme jako aritmetický průměr :

$$\boxed{p_{stř} = \frac{p_1 + p_2}{2}}$$

střední tlak v potrubí

Po vynásobení touto hodnotou tlaku tedy dostaneme vztah pro pV-proud plynu :

$$\boxed{q = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \cdot \left(\frac{p_1 + p_2}{2} \right) \cdot (p_1 - p_2)}$$

pV-proud při viskózním proudění

Vidíme, že proud plynu vzrůstá se čtvrtou mocninou poloměru trubice, je úměrný střednímu tlaku v potrubí a závisí na druhu plynu (koficient viskozity).

Rovnice ovšem neplatí pro malé l, protože pro $l \to 0$ je $q \to \infty$, dokonce přestává platit už pro $l \approx r$. Dosti komplikovaný výpočet pro krátkou trubku (otvor ve stěně) ale nebudeme provádět.

Vztah pro pV-proud lze napsat formálně ve tvaru :

$$q = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \cdot p_{stř} \cdot (p_1 - p_2) = C_{vis} \cdot (p_1 - p_2),$$

kde jsme označili :

$$\boxed{C_{vis} = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \cdot p_{stř}}$$

vodivost trubky při viskózním proudění

Vidíme, že vodivost trubky poloměru r a délky l je úměrná střednímu tlaku a čtvrté mocnině poloměru a závisí na druhu plynu.

Nejčastěji čerpáme vzduch při 20 $^\circ C$, pak je $\eta = 1{,}82 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{P}a.s$ a vodivost trubky za těchto podmínek je:

$$C_{vis} = 2{,}15 \cdot 10^4 \cdot \frac{r^4}{l} \cdot p_{stř}\,.$$

2. molekulární proudění (za molekulární podmínky $\bar{l} >> d$, většinou postačuje $\bar{l} > d$)

K tomuto proudění dochází za molekulárních podmínek v plynu, při nichž je střední volná dráha větší než lineární rozměr systému. Za těchto podmínek plyn není možno považovat za spojitou látku, neboť prakticky nedochází k vzájemným srážkám a molekuly pohybující se trubicí mění svůj impuls pouze při srážkách se stěnami trubice (vnější tření plynu) a nelze proto použít vrstvový model.

Síla, která způsobuje proudění, je opět daná rozdílem tlaků a plochou, tentokrát celého průřezu potrubí (nelze už rozlišovat vrstvy) .

$$F = \pi r^2 \cdot (p_1 - p_2)$$

Proudění plynu brzdí třecí síla mezi plynem a vnitřní stěnou trubky, kterou vypočítáme z celkového impulsu, předávaného celé vnitřní ploše stěny molekulami za 1 času (všechny molekuly mají přídavnou rychlost proudění u) :

$$F_1 = 2\pi rl \cdot \frac{1}{4} n\bar{v} \cdot mu = \frac{1}{2}\pi rln\bar{v} \cdot mu$$

V ustáleném stavu se obě síly musí rovnat :

$$F = F_1$$

Tedy :

$$\pi r^2 (p_1 - p_2) = \frac{1}{2}\pi rln\bar{v} \cdot mu$$

Vypočítáme rychlost molekul :

$$u = \frac{2r(p_1 - p_2)}{lmn\bar{v}}$$

Tlak plynu v trubce se opět spojitě mění od hodnoty p_1 na vstupu do hodnoty p_2 na výstupu, stejně tak koncentrace plynu, proto veličina n v získaném vztahu musí mít smysl střední koncentrace plynu v potrubí a můžeme ji nahradit středním tlakem podle stavové rovnice, současně dosadíme za střední rychlost molekul :

$$p_{stř} = n \cdot k \cdot T \qquad\qquad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Dostaneme :

$$u = \frac{2r(p_1 - p_2)}{lmn\bar{v}} = \frac{2r(p_1 - p_2)}{lm} \cdot \frac{kT}{p_{stř}} \cdot \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} = \frac{r(p_1 - p_2)}{l\,p_{stř}} \cdot \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}}$$

Objem plynu, který projde průřezem trubky za jednotku času (objemový proud), vypočítáme jako součin rychlosti plynu a průřezu :

$$q_V = \pi r^2 \cdot u = \frac{\pi r^3}{l} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_{stř}} \cdot \sqrt{\frac{\pi k T}{2m}}$$

Po vynásobení středním tlakem v trubici pak dostaneme vztah pro *pV*-proud plynu :

$$q = p_{stř} \cdot q_V = \frac{\pi r^3}{l} \cdot (p_1 - p_2) \cdot \sqrt{\frac{\pi k T}{2m}}$$

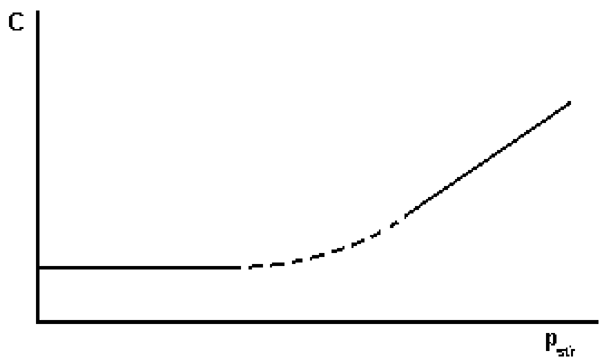
Přesný výpočet, který vezme v úvahu, že plyn není v termodynamické rovnováze (molekuly konají kromě neuspořádaného pohybu také pohyb přídavnou rychlostí u) pouze nahradí číslo π konstantou 8/3), tedy bude :

$$\boxed{q = \frac{8}{3} \cdot \frac{r^3}{l} \cdot (p_1 - p_2) \cdot \sqrt{\frac{\pi k T}{2m}}}$$

<u>pV-proud při molekulárním proudění</u>

Vidíme, že proud plynu závisí na teplotě a na druhu plynu (ne však na jeho viskozitě a na středním tlaku) , na rozdíl od viskózního proudění je úměrný pouze třetí mocnině poloměru trubice. To má za následek, že týmž potrubím proudí při nízkých tlacích mnohem méně plynu, než při tlacích vyšších.

Graficky – v celém oboru tlaků :



Vztah pro *pV*-proud lze opět napsat ve tvaru :

$$q = C_{mol} \cdot (p_1 - p_2),$$

kde jsme označili :

$$\boxed{C_{vis} = \frac{8}{3} \cdot \frac{r^3}{l} \cdot \sqrt{\frac{\pi k T}{2m}}}$$

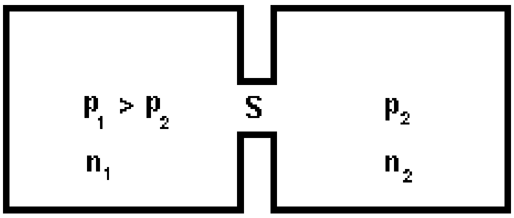
vodivost trubky při molekulárním proudění

Vodivost trubky nyní nezávisí na tlaku, je úměrná pouze r^3, závisí na teplotě a druhu plynu. Pro vzduch při $20\ ^\circ C$, (hmotnost molekuly $m = 4{,}82 \cdot 10^{-26}$ kg), dostáváme:

$$C_{mol} = 968{,}5 \cdot \frac{r^3}{l}.$$

Získané vztahy opět neplatí pro krátké trubky, u molekulárního proudění lze však vztahy pro proud plynu a vodivost krátké trubky - vlastně otvoru - odvodit velmi snadno:

2 a. molekulární proudění otvorem v přepážce



Při znalost veličiny částicový déšť snadno určíme počty částic dopadající za jednotku času na otvor plochy S :

zleva dopadne $\left(\frac{1}{4} n_1 \bar{v} S\right)$ a zprava $\left(\frac{1}{4} n_2 \bar{v} S\right)$

Tedy přes plochu S teče zleva doprava ***částicový proud*** daný rozdílem obou výrazů :

$$q_N = \frac{1}{4}(n_1 - n_2)\bar{v}S.$$

Dosadíme za koncentrace ze stavové rovnice a známý vztah pro střední rychlost:

$$q_N = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{p_1}{kT} - \frac{p_2}{kT}\right) \cdot \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \cdot S = \frac{S}{\sqrt{2\pi mkT}}(p_1 - p_2)$$

A pro kruhový otvor bude:

$$q_N = \frac{\pi r^2}{\sqrt{2\pi mkT}}(p_1 - p_2)$$

Vytvoříme pomocí stavové rovnice obecný vztah pro převod částicového proudu na pV -proud:

$$q = q_{pV} = \frac{d(pV)}{dt} = \frac{d(nkTV)}{dt} = kT \cdot \frac{d(nV)}{dt} = kT \cdot \left(\frac{dN}{dt}\right) = kT \cdot q_N$$

Tedy:

$$q = kT \cdot q_N = kT \frac{\pi r^2}{\sqrt{2mkT\pi}}(p_1 - p_2)$$

A výsledek bude :

$$\boxed{q = \pi r^2 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \cdot (p_1 - p_2)}$$

pV-proud otvorem při molekulárním proudění

Vztah pro pV-proud lze tedy opět napsat ve tvaru :

$$q = C_{EF} \cdot (p_1 - p_2),$$

kde jsme označili :

$$\boxed{C_{EF} = \pi r^2 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}}$$

efúzní vodivost otvoru

Efúzní vodivost otvoru nezávisí na tlaku, pouze na teplotě a druhu plynu (je vyšší pro lehčí plyny), je úměrná ploše otvoru, tedy pouze kvadrátu poloměru otvoru.

Pro vzduch ($m = 4{,}82 \cdot 10^{-26}$ kg) a $20\,^{\circ}C$:

$$C_{EF} = 363 \cdot r^2 \; m^3.s^{-1}.$$

Efúzní vodivost otvoru se často přepočítá na otvor velikosti **$1\ cm^2$** (zkuste za D.cv.) a používá se k odhadu vodivosti otvorů a také dovoluje odhadnout čerpací rychlost vývěvy z plochy jejího vstupního otvoru :

$$\boxed{C_{EF}^{(1)} = 11{,}6 \;\; l.s^{-1}.cm^{-2}.}$$

Efúzní vodivost je nejmenší ze všech uvedených vodivostí ($\approx r^2$), vodivost otvorů (štěrbin) za molekulárních podmínek je malá, což lze někdy využít při konstrukci vakuových zařízení.

Všechny získané vztahy pro proud plynu mají tvar:

$$\boxed{q \;=\; C \cdot (\, p_1 - p_2 \,)}$$

který je podobný ***Ohmovu zákonu*** pro elektrický proud :

$$\boxed{I \;=\; \left(\frac{1}{R}\right) \cdot U}$$

kde : $\dfrac{1}{R}$ je elektrická vodivost a $U = \varphi_1 - \varphi_2$ je rozdíl potenciálů.

Je proto možné analogicky definovat veličinu ***(vakuový) (plynový) <u>odpor potrubí</u>*** , který bude mít např. pro vzduch hodnotu :

$$R_{vis} = \frac{1}{C_{vis}} = \frac{8\eta l}{\pi r^4 p_{stř}} = \frac{1}{2{,}158 \cdot 10^4} \cdot \left(\frac{l}{r^4 p_{stř}}\right) = 4{,}63 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{l}{r^4 p_{stř}}\right)$$

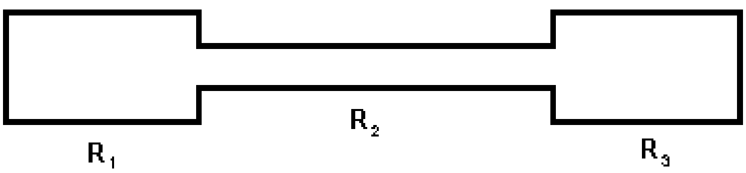
$$R_{mol} = \frac{1}{C_{mol}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{l}{r^3} \cdot \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} = \frac{1}{968{,}5} \cdot \left(\frac{l}{r^3}\right) = 1{,}03 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{l}{r^3}\right)$$

$$R_{EF} = \frac{1}{C_{EF}} = \frac{1}{\pi r^2} \cdot \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}} = \frac{1}{363} \cdot \left(\frac{1}{r^2}\right) = 2{,}75 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Daleko významnější je platnost ***Kirchhoffových zákonů*** pro proudění plynu potrubím :

1) **při sériovém spojení potrubí se sčítají odpory jednotlivých částí potrubí:**

$$\boxed{R = R_1 + R_2 + R_3}$$



A speciálně:

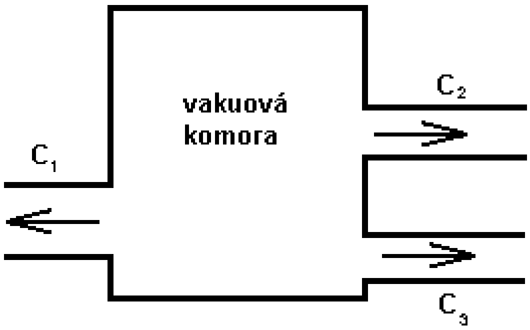
I odpor jediné trubky je vlastně součet molekulárního odporu trubky a efúzního odporu vstupního otvoru:

$$R_{mol}^{tr} = R_{ef} + R_{mol} = \frac{1}{\pi r^2} \cdot \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}} + \frac{3}{8} \cdot \frac{l}{r^3} \cdot \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{l}{r^3} \right) = 2{,}75 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{1}{r^2} \right) + 1{,}03 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{l}{r^3} \right)$$

2) při paralelním spojení potrubí se sčítají vodivosti jednotlivých potrubí:

$$\boxed{C = C_1 + C_2 + C_3}$$



(konec kapitoly) **K. Rusňák, verze 03/2013**